А.А. КОНОНОВА, А.Л. БЕЛКОВА

УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Балтийский государственный технический университет «Военмех»

А.А. КОНОНОВА, А.Л. БЕЛКОВА

УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Учебное пособие

Санкт-Петербург
2019

УДК 53:517.9 (075.8)
К64

Кононова, А. А.

К 64 Уравнения математической физики: учебное пособие / А.А. Кононова, А.Л. Белкова; Балт. гос. ун-т. – СПб., 2019. – 77 с.

В пособии, соответствующем программе курса «Методы математической физики», изложены основные сведения о типах и методах решения уравнений в частных производных.

Предназначено для студентов инженерных специальностей.

УДК 53:517.9 (075.8)

Р е ц е н з е н т канд. техн. наук *В.Ю. Емельянов*

Утверждено
редакционно-издательским
советом университета

1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

1.1. Векторное пространство

Безусловно, каждый студент неоднократно сталкивался с понятием вектора. Как правило, это понятие ассоциируется со "стрелкой", "направленным отрезком", т.е. неким геометрическим объектом, имеющим длину и направление, который можно по некоторым правилам складывать с другим подобным объектом, а также умножать на скаляр.

Отбросим наше визуальное представление о векторе и дадим абстрактное определение векторного пространства.

Определение. *Векторным (или линейным) пространством называется произвольное множество* $\mathbf{V}$*, если*

- *для любой пары элементов* $\mathbf{V}$ *определена операция сложения:* $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{V}$ *определен вектор* $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in \mathbf{V}$,
- *определена операция умножения элемента* $\mathbf{V}$ *на число:* $\forall \mathbf{x} \in \mathbf{V}, \alpha \in \mathbb{R}$ *(или* $\mathbb{C}$*) определен вектор* $\alpha \in \mathbf{V}$;

причем эти операции удовлетворяют следующей системе аксиом:

1. $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x} \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{V}$;
2. $\mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z}) = (\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z}, \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbf{V}$;
3. $\exists \mathbf{0} \in \mathbf{V} : \mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{x} \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbf{V}$;
4. $\forall \mathbf{x} \in \mathbf{V} \quad \exists (-\mathbf{x}) \in \mathbf{V} : \quad \mathbf{x} + (-\mathbf{x}) = \mathbf{0}$;
5. $\alpha(\beta \mathbf{x}) = (\alpha\beta)\mathbf{x}, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbf{V}, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$;
6. $(\alpha + \beta)\mathbf{x} = \alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{x}, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbf{V}, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$;
7. $1 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x} \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbf{V}$;
8. $\alpha(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \alpha\mathbf{x} + \alpha\mathbf{y}, \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{V}, \forall \alpha \in \mathbb{R}$;

Примеры.

1. Хотя в формулировке ничего не сказано ни про длину, ни про направление вектора, привычное пространство "геометрических" векторов в трехмерном пространстве ("направленных отрезков") подходит под это определение.

2. Под это же определение подходит и пространство $C[0,1]$ — простраство функций, непрерывных на отрезке $[0,1]$: их можно складывать, умножать на число, при этом результат будет непрерывен на том же отрезке, и будут выполняться все приведенные в определении аксиомы.

Итак, мы абстрагировались от понятия геометрического вектора и дали более общее аксиоматическое определение векторного пространства. Пойдем по этому пути дальше.

Для геометрических векторов вводилось понятие скалярного произведения. Стандартное школьное определение скалярного произведения включает в себя понятие угла между векторами. В случае абстрактного векторного пространства такого понятия нет, поэтому определим скалярное произведение аксиоматически, опираясь на известные свойства этой операции для геометрических векторов.

Определение. *Скалярным произведением называется операция, ставящая в соответствие двум векторам* $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{V}$ *число* $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}$ *и удовлетворяющая следующим условиям:*

1. $\forall \mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}, \mathbf{y} \in \mathbf{V}, \forall \alpha \in \mathbb{R}$

   $(\alpha \mathbf{x_1} + \mathbf{x_2}, \mathbf{y}) = \alpha(\mathbf{x_1}, \mathbf{y}) + (\mathbf{x_2}, \mathbf{y})$;

2. $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{V}$

   $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{y}, \mathbf{x})$;

3. $\forall \mathbf{x} \in \mathbf{V}$

   $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \geq \mathbf{0}$;

4. $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Если в векторном пространстве определено скалярное произведение, то в этом пространстве можно ввести понятия длины (или нормы) вектора и косинуса угла между векторами.

Определение. *Длина (норма) вектора:*

$$\|\mathbf{x}\| := \sqrt{(\mathbf{x}, \mathbf{x})}.$$

Косинус угла между векторами

$$\cos(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \frac{(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\|}.$$

1.2. Пространство $L^2([a,b],\rho)$

Определение. *Пусть задана некоторая неотрицательная функция $\rho : [a,b] \to [0,\infty)$, назовем эту функцию* **весом.**

Определим векторное пространство функций

$$L^2([a,b],\rho) := \{f : [a,b] \to \mathbb{R}, \int_a^b |f(x)|^2 \rho(x)dx < +\infty\}.$$

В случае $\rho(x) \equiv 1$ будем писать $L^2[a,b]$.

Замечание. *Мы привели упрощенный вариант определения пространства $L^2[a,b]$ (с использованием интеграла Римана). Для серьезного изучения математической физики требуется знание теории меры Лебега и функционального анализа. Мы будем работать в основном в пространстве $C^2[a,b]$ функций, дважды непрерывно дифференцируемых на отрезке, которое содержится в пространстве $L^2[a,b]$. Однако следует иметь в виду, что для решения многих интересных задач математической физики (например, задач, связанных с кусочно-непрерывными функциями) пространство $C^2[a,b]$ оказывается слишком "тесным".*

Определение. *В пространстве $L^2([a,b],\rho)$ введем скалярное произведение с весом $\rho(x) \geq 0,\ x \in [a,b]$:*

$$(f,g)_\rho := \int_a^b f(x)g(x)\rho(x)dx.$$

Замечание. *Для того чтобы определенная выше операция удовлетворяла аксиомам скалярного произведения, в пространстве $L^2[a,b]$ отождествляют функции, различающиеся лишь на множестве нулевой меры.*

Определение. *Функции $f, g \in L^2[a,b]$ называются ортогональными (относительно скалярного произведения с весом ρ), если*

$$(f,g)_\rho := 0.$$

Обычно мы будем опускать индекс ρ в скалярном произведении и писать (f,g).

1.3. Обобщенный ряд Фурье

Определение. *Система функций* $\{\phi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$, $\phi_n \in L^2([a,b];\rho)$ *называется* **ортогональной**, *если*

$$(\phi_n, \phi_k) = 0, \ n \neq k.$$

Определение. *Пусть* $\phi_n(x)$ *- ортогональная система функций в* $L^2[a,b]$, $f \in L^2[a,b]$. *Ряд*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \phi_n(X),$$

где

$$c_n := \frac{(f, \phi_n)}{\|\phi_n\|^2},$$

называется обобщенным рядом Фурье по ортогональной системе функций $\{\phi_n(x)\}$, *а коэффициенты* c_n *— обобщенными коэффициентами Фурье.*

Замечание. Обратите внимание, что в определении ничего не говорится о равенстве между функцией и ее рядом Фурье (бывают, в частности, непрерывные функции, для которых это равенство не выполняется). Для обозначения соответствия между функцией и ее рядом Фурье используют обычно знак $\sim$ (при этом не придавая ему никакого асимптотического смысла):

$$f \sim \sum_{n=0}^{\infty} c_n \phi_n(X)$$

Теорема 1 (Экстремальное свойство ряда Фурье)**.** *Пусть дана ортогональная система функций* $\{\phi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$. *Среди всех функций вида* $T_N(x) = \sum_{n=0}^{N} \alpha_n \phi_n(x)$, *где* $\alpha_n \in \mathbb{R}$ *— произвольные вещественные числа, наилучшей среднеквадратичной аппроксимацией функции* $f(x)$ *является частичная сумма ее обобщенного ряда Фурье по системе* $\{\phi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$:

$$S_N(x) = \sum_{n=0}^{N} c_n \phi_n(x),$$

то есть

$$\|f(x) - S_N(x)\| \leq \|f(x) - T_N(x)\|.$$

1.4. Классический ряд Фурье

Рассмотрим пространство $L^2[-\pi,\pi]$ и введем в нем скалярное призведение с весом $\rho(x) = 1$.

Функции $\{1, \cos nx, \sin nx, n \in \mathbb{N}\}$ являются попарно ортогональными:

$$(1, \cos nx) = \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx = \delta_{mn} 2\pi;$$

$$(1, \sin nx) = \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx dx = 0;$$

$$(\sin mx, \cos nx) = \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cos nx dx = 0;$$

$$(\sin mx, \sin nx) = \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx dx = \delta_{mn}\pi;$$

$$(\cos mx, \cos nx) = \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx dx = \delta_{mn}\pi, \quad m \neq 0;$$

где δ_{mn} — дельта-символ Кронекера:

$$\delta_{mn} = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ 1, & m = n. \end{cases}$$

Теорема 2. *Система функций $\{1, \cos nx, \sin nx\}, n \in \mathbb{N}$ является ортогональным базисом пространства $L^2[-\pi,\pi]$.*

Определение. *Коэффициенты Фурье (классические) функции $f \in L^2[-\pi,\pi]$:*

$$a_n := \frac{1}{\pi}(f(x), \cos nx);$$

$$b_n := \frac{1}{\pi}(f(x), \sin nx);$$

Определение. *Ряд Фурье (классический) функции $f \in L^2[-\pi,\pi]$:*

$$S_f(x) := \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

Замечание. *В настоящем пособии мы не будем рассматривать вопросы сходимости рядов Фурье.*

1.5. Линейные операторы в векторном пространстве

Определение. *Отображение T, действующее из векторного пространства V_1 в векторное пространство V_2, называется* **линейным оператором***, если*

$$\forall u, v \in V_1, \ \ \forall k \in \mathbb{R} \ \ \ T(u + k \cdot v) = T(u) + k \cdot T(v).$$

Определение. *Пусть задан линейный оператор*

$$T : V \to V.$$

Число λ называется **собственным числом** *оператора T, если существует ненулевой элемент векторного пространства $v \in V$, $v \neq 0$, такой, что*

$$T(v) = \lambda \cdot v.$$

Вектор v при этом называется **собственным вектором***, соответствующим собственному числу λ.*

Отметим следующие свойства собственных векторов.

1. Если $u, v \in V$ — собственные векторы оператора T, соответствующие собственному числу λ:

$$T(u) = \lambda u, \ \ T(v) = \lambda v,$$

то линейная комбинация этих векторов $ku + v \neq 0$ также является собственным вектором оператора T:

$$T(ku + v) = \lambda \cdot (ku + v).$$

2. Если векторы $v_1, v_2, \ldots, v_n$ являются собственными векторами оператора T, соответствующими различным собственным числам $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$:

$$T(v_k) = \lambda_k v_k,$$

то векторы $v_1, v_2, \ldots, v_n$ являются линейно независимыми.

Примеры. 1. Рассмотрим пространство векторов на плоскости $V = \mathbb{R}^2$. Оператор $T : V \to V$ зададим следующим образом:

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Найдем собственные числа и собственные векторы T:

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{pmatrix};$$

$$\begin{cases} (1-\lambda)x + 2y = 0, \\ 2x + (1-\lambda)y = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \dfrac{(\lambda-1)}{2}x, \\ (\lambda^2 - 2\lambda - 3)x = 0; \end{cases}$$

Так как по определению собственный вектор не может быть равен нулю, то из последнего уравнения следует:

$$\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 3,\ \lambda_2 = -1.$$

Соответствующие собственные векторы:

- для $\lambda_1 = 3$ из первого уравнения последней системы получаем $y = x$, следовательно, любой вектор (t, t), $t \neq 0$ является собственным вектором, соответствующим $\lambda_1 = 3$;

- для $\lambda_2 = -1$ из первого уравнения последней системы получаем $y = -x$, следовательно, любой вектор $(t, -t)$, $t \neq 0$ является собственным вектором, соответствующим $\lambda_2 = -1$.

2. В качестве пространства V рассмотрим пространство $C^\infty[0, 1]$ функций, дифференцируемых на отрезке $[0, 1]$ бесконечное число раз. Оператор T зададим следующим образом:

$$T(f) := f'(x) + f(x).$$

Нетрудно проверить, что этот оператор является линейным.

Найдем собственные числа и собственные векторы (=собственные функции) этого оператора:

$$T(f) = \lambda f \quad \Leftrightarrow \quad f' + f = \lambda f;$$

Из курса общих дифференциальных уравнений известно, что это уравнение имеет ненулевые решения при любом $\lambda \in \mathbb{R}$ (т.е. все они являются собственными числами). Соответствующий собственный вектор выглядит так:

$$f(x) = Ce^{(\lambda-1)x}, \;\; C \neq 0.$$

2. ВОЛНОВОЕ УРАВНЕНИЕ

2.1. Однородное волновое уравнение

Предположим, что концы туго натянутой струны закреплены на плоскости. Проведем ось $0x$ так, чтобы эти точки имели координаты 0 и l по оси $0x$. Если вывести струну из положения равновесия (например, щелчком), то она начнет колебаться. Будем предполагать, что колебания струны не выводят ее точек из нашей плоскости. Отклонение точек струны по вертикали от оси $0x$ в момент времени t будем обозначать $u(x,t)$. Тогда условие неподвижности концов струны будет записано так:

$$u(0,t) = u(l,t) = 0, \;\; \forall t.$$

Начальные условия, описывающие, каким образом мы выводим струну из положения равновесия в начальный момент времени, можно записать в виде

$$u(x,0) = \phi(x), \;\; u'_t(x,0) = \psi(x).$$

Простейшее **уравнение колебаний струны:**

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}.$$

Такое уравнение также называется **волновым уравнением**.

2.2. Решение однородного волнового уравнения. Метод разделения переменных

Будем искать решение уравнения

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}. \qquad (1)$$

с граничными условиями (концы струны закреплены)

$$u(0,t) = u(l,t) = 0 \qquad (2)$$

при начальных условиях

$$u(x,0) = \phi(x), \;\; u'_t(x,0) = \psi(x) \qquad (3)$$

методом **разделения переменных** или **методом Фурье**.

Попробуем найти решение в виде

$$u(x,t) = X(x)T(t).$$

$$X''T = 1/a^2 T''X,$$

Подставляем в исходное уравнение и разделяем переменные:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{a^2}\frac{T''(t)}{T(t)}.$$

Левая часть уравнения зависит только от x, а правая — только от t. Это может выполняться только в том случае, когда обе части равны константе. Обозначим эту константу $-\lambda$.

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{a^2}\frac{T''(t)}{T(t)} = -\lambda.$$

Мы пришли к системе двух дифференциальных уравнений второго порядка. В этих уравнениях участвует некоторый параметр λ, связывающий одно уравнение с другим. На время "забудем"о начальных условиях и будем рассматривать все решения волнового уравнения с учетом только краевой задачи. Краевая задача, очевидно, накладывает условия только на уравнение для $X(x)$. Решения полученной задачи Коши зависят от параметра λ и длины струны l. Нас будут интересовать случаи, в которых задача имеет ненулевые решения.

Определение. Задача Штурма – Лиувилля (частный случай).

Требуется

1) найти значения λ, при которых существуют нетривиальные решения задачи

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad X(x) \not\equiv 0$$

$$u(0) = u(l) = 0;$$

(собственные значения задачи Штурма – Лиувилля);

2) найти соответствующие решения (собственные функции задачи Штурма – Лиувилля).

Из курса дифференциальных уравнений известно, что уравнение $X''(x) + \lambda X(x) = 0$ имеет ненулевые решения при любых значениях параметра λ, однако не все эти решения будут удовлетворять граничным условиям. Рассмотрим возможные случаи.

Случай $\lambda < 0$:

$$X(x) = C_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x}$$

$$X(0) = C_1 + C_2 = 0,$$

$$X(l) = C_1 e^{l\sqrt{-\lambda}} + C_2 e^{-l\sqrt{-\lambda}} = 0.$$

$$C_1 = C_2 = 0$$

$$X(x) \equiv 0.$$

Таким образом, отрицательные числа не являются собственными числами указанной задачи Штурма – Лиувилля.

Случай $\lambda = 0$:

$$X(x) = C_1 x + C_2$$

$$X(0) = C_2 = 0$$

$$X(l) = C_1 l = 0.$$

$$X(x) \equiv 0.$$

Таким образом, число 0 не является собственным числом указанной задачи Штурма–Лиувилля.

Случай $\lambda > 0$:

$$X(x) = D_1 \cos\sqrt{\lambda}x + D_2 \sin\sqrt{\lambda}x,$$

$$X(0) = D_1 = 0,$$
$$X(l) = D_2 \sin\sqrt{\lambda}l = 0.$$

$$\sin\sqrt{\lambda}l = 0,$$
$$\sqrt{\lambda} = \frac{\pi n}{l}.$$

Итак, собственными значениями указанной задачи являются числа

$$\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2, n \in \mathbb{N},$$

а собственными функциями

$$X_n(x) = \sin\frac{\pi n}{l}x.$$

Вернемся к решению задачи о колебаниях струны. Из полученного выше решения задачи Штурма–Лиувилля следует, что для решения задачи о колебаниях струны надо взять $\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2, n \in \mathbb{N}$, тогда

$$X_n(x) = \sin\frac{\pi n}{l}x,$$

$$T_n(x) = A_n \cos\frac{\pi a n}{l}t + B_n \sin\frac{\pi a n}{l}t.$$

Можно убедиться подстановкой, что функции $u_n(x,t) = X_n(x)T_n(t)$ удовлетворяют уравнению в частных производных (1) и граничным условиям (2).

Рассмотрим ряд

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos\frac{\pi an}{l}t+B_n\sin\frac{\pi an}{l}t\right)\sin\frac{\pi n}{l}x.$$

Функция $u(x,t)$ также будет удовлетворять уравнению (1) и граничным условиям (2). Подберем коэффициенты A_n, B_n таким образом, чтобы выполнялись начальные условия (3). Найдем $u'_t(x,t)$:

$$u'_t(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi an}{l}\left(B_n\cos\frac{\pi an}{l}t-A_n\sin\frac{\pi an}{l}t\right)\sin\frac{\pi n}{l}x$$

Из начальных условий следует (подставляем $t=0$):

$$\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin\frac{\pi n}{l}x=\phi(x),$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi n}{l}B_n\sin\frac{\pi n}{l}x=\psi(x).$$

Домножим скалярно каждое из равенств на $X_n(x)=\sin\frac{\pi n}{l}\xi$. Используя ортогональность системы векторов $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$, получаем

$$A_n=\frac{(\phi,X_n)}{\|X_n\|^2}=\frac{2}{l}\int_0^l\phi(\xi)\sin\frac{\pi n\xi}{l}d\xi,$$

$$B_n=\frac{l}{\pi na}\frac{(\psi,X_n)}{\|X_n\|^2}=\frac{2}{\pi na}\int_0^l\psi(\xi)\sin\frac{\pi n\xi}{l}d\xi.$$

Итак, мы получили решение:

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos\frac{\pi an}{l}t+B_n\sin\frac{\pi an}{l}t\right)\sin\frac{\pi n}{l}x,$$

где

$$A_n=\frac{2}{l}\int_0^l\phi(\xi)\sin\frac{\pi n\xi}{l}d\xi,$$

$$B_n=\frac{2}{\pi na}\int_0^l\psi(\xi)\sin\frac{\pi n\xi}{l}d\xi,$$

Пример. Решим задачу о колебании струны:

$$u_{tt} = \frac{9}{4}u_{xx}, \;\; u(0,t) = u(1,t) = 0.$$

при следующих начальных условиях:

$$u(x,0) := x^3 - x, \;\; u_t(x,0) = 0$$

Задача Штурма – Лиувилля

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \;\; X(0) = X(1) = 0, \;\; X(x) \not\equiv 0.$$

Собственные значения задачи Штурма – Лиувилля

$$\lambda_n = (\pi n)^2,$$

собственные функции задачи Штурма – Лиувилля

$$X_n(x) = \sin(\pi n x).$$

Решение УЧП имеет вид

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} (A_n \cos(3\pi n t/2) + B_n \sin(3\pi n t/2)) \sin \pi n x,$$

где

$$A_n = 2\int_0^1 \phi(\xi) \sin \pi n \xi d\xi,$$
$$B_n = 0.$$

2.3. Общая задача Штурма – Лиувилля. Виды краевых условий.

Определение (Оператор Штурма – Лиувилля)**.** *Оператором Штурма – Лиувилля L называется линейный дифференциальный оператор второго порядка, действующий на функцию $y \in C^2[a,b]$ следующим образом:*

$$L[y] \equiv \frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dy}{dx}\right] - q(x)y(x),$$

где $p, p', q \in C(a,b)$, $p(x) > 0 \; \forall x \in (a,b)$.

Определение. Задача Штурма – Лиувилля (общий случай) *заключается в поиске:*

- *значений λ (собственных значений задачи Штурма – Лиувилля), при которых существуют нетривиальные решения задачи*

$$L[y] + \lambda\rho(x)y(x) = 0, \quad \rho \in C(a,b), \rho(x) > 0,$$

  удовлетворяющие краевым условиям

$$\alpha_1 y'(a) + \beta_1 y(a) = 0, \ \ \alpha_1^2 + \beta_1^2 \neq 0;$$

$$\alpha_2 y'(b) + \beta_2 y(b) = 0, \ \ \alpha_2^2 + \beta_2^2 \neq 0;$$

- *и соответствующих решений (собственных функций задачи Штурма – Лиувилля).*

Определение. *Принята следующая терминология для* **классификации краевых условий***:*

- *условия* **Дирихле** *(их также называют краевыми условиями первого рода) $y(a) = y(b) = 0$;*
- *условия* **Неймана** *(краевые условия второго рода) $y'(a) = y'(b) = 0$;*
- *условия* **Робена** *$y'(a) - hy(a) = y'(b) + Hy(b) = 0$;*
- *смешанные* **условия** *(разного вида на разных концах отрезка);*
- **периодические** *условия $y(a) = y(b), y'(a) = y'(b)$;*
- **антипериодические** *условия $y(a) = -y(b), y'(a) = -y'(b)$;*
- *общие краевые условия $a_{i1}y(a) + a_{i2}y'(a) + a_{i3}y(b) + a_{i4}y'(b) = 0$.*

2.3.1. *Свойства собственных значений и собственных функций задачи Штурма – Лиувилля*

1. Существует счетное множество собственных значений $\lambda_n \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N}$:
$$\lambda_1 < \lambda_2 < ... < \lambda_n < ....$$

2. Каждому λ_n соответствует единственная с точностью до константы собственная функция $y_n(x)$.

3. Собственные функции X_k ортогональны с весом $\rho(x)$, т.е.

$$(X_k, X_j)_\rho = \int_a^b X_k(\xi)X_j(\xi)\rho(\xi)d\xi = C_k\delta_{jk}, \;\; C_k \neq 0.$$

4. В случае $y(a) = y(b) = 0, \;\; q(x) \geq 0$ все собственные значения положительны.

Теорема 3 (Стеклов)**.** *Любая дважды непрерывно дифференцируемая на отрезке $[a, b]$ функция $f \in C^2[a, b]$, удовлетворяющая на концах этого отрезка однородным краевым условиям, представима в виде абсолютно и равномерно сходящегося ряда Фурье по ортогональной с весом $\rho(x)$ системе собственных функций $\{u_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ задачи Штурма – Лиувилля (с теми же краевыми условиями):*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n u_n(x);$$

$$f_n := \frac{(f, u_n)_\rho}{\|u_n\|_\rho^2} = \frac{\int_a^b f(x)u_n(x)\rho(x)dx}{\int_a^b u_n^2(x)\rho(x)dx}.$$

2.3.2. *Краевые условия Неймана*

Ранее мы подробно рассматривали решение задачи Штурма – Лиувилля для краевой задачи Дирихле. Посмотрим, как краевые условия влияют на решение.

Рассмотрим простейшую задачу Штурма – Лиувилля с краевыми условиями Неймана:

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0,$$

$$X'(0) = X'(l) = 0.$$

При $\lambda < 0$

$$X(x) = C_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x}.$$

Из краевого условия $X'(0) = 0$

$$C_1 = C_2.$$

Тогда $X(x) = 2C_1 \operatorname{ch}\sqrt{-\lambda}x, \;\; X'(x) = 2C_1\sqrt{-\lambda}\operatorname{sh}\sqrt{-\lambda}x$. Из краевого условия $X'(l) = 0$

$$X'(l) = 2C_1\sqrt{-\lambda}\operatorname{sh}\sqrt{-\lambda}l = 0 \;\Rightarrow\; C_1 = C_2 = 0.$$

Следовательно, числа $\lambda < 0$ не являются собственными числами задачи Штурма – Лиувилля.

При $\lambda = 0$

$$X(x) = C_1 x + C_2.$$

Из краевого условия $X'(0) = 0$

$$C_1 = 0.$$

Тогда $X(x) = C_2, \;\; X'(x) = 0$. Таким образом, второе краевое условие $X'(l) = 0$ выполняется при любом C_2. Следовательно, число $\lambda = 0$ является собственным числом задачи Штурма – Лиувилля. Ему соответствует собственная функция $X_0 := 1$.

При $\lambda > 0$

$$X(x) = C_1 \sin(\sqrt{\lambda} x) + C_2 \cos(\sqrt{\lambda} x).$$

Из краевого условия $X'(0) = 0$

$$C_1 = 0.$$

Тогда $X(x) = C_2 \cos(\sqrt{\lambda} x), \;\; X'(x) = -C_2 \sqrt{\lambda} \sin(\sqrt{\lambda} x)$. Из краевого условия $X'(l) = 0$

$$X'(l) = -C_2 \sqrt{\lambda} \sin(\sqrt{\lambda} l) = 0 \;\Rightarrow\; \lambda_n := \frac{\pi^2 n^2}{l^2},\; n \in \mathbb{N}.$$

Следовательно, числа $\lambda_n := \frac{\pi^2 n^2}{l^2},\; n \in \mathbb{N}$. являются собственными числами задачи Штурма – Лиувилля. Соответствующие собственные функции $X_n(x) = \cos(\sqrt{\lambda_n} x)$.

Таким образом, задача Штурма – Лиувилля с краевыми условиями Неймана имеет бесконечное множество решений следующего вида:

$$\lambda_n = \frac{\pi^2 n^2}{l^2},\; n = 0, 1, 2 \ldots;$$

$$X_n(x) = \cos(\sqrt{\lambda_n} x).$$

Обратите внимание, что нумерация собственных чисел и собственных векторов начинается с $n = 0$, тем самым мы, учитывая, что $\cos 0 = 1$, включаем случай $\lambda_0 = 0, X_0 = 1$.

2.3.3. *Краевые условия Дирихле – Неймана*

В этом пункте мы рассмотрим решение задачи Штурма – Лиувилля со смешанными краевыми условиями Дирихле – Неймана:

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0,$$

$$X(0) = X'(l) = 0.$$

При $\lambda < 0$

$$X(x) = C_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x}.$$

Из краевого условия $X(0) = 0$

$$C_1 = -C_2.$$

Тогда $X(x) = 2C_1 \operatorname{sh} \sqrt{-\lambda}x, \quad X'(x) = 2C_1\sqrt{-\lambda} \operatorname{ch} \sqrt{-\lambda}x$. Из краевого условия $X'(l) = 0$

$$X'(l) = 2C_1\sqrt{-\lambda} \operatorname{ch} \sqrt{-\lambda}l = 0 \ \Rightarrow \ C_1 = C_2 = 0.$$

Следовательно, числа $\lambda < 0$ не являются собственными числами задачи Штурма–Лиувилля.

При $\lambda = 0$

$$X(x) = C_1 x + C_2.$$

Из краевого условия $X(0) = 0$

$$C_2 = 0.$$

Тогда $X(x) = C_1 x, \quad X'(x) = C_1$. Таким образом, второе краевое условие $X'(l) = 0$ выполняется только при $C_1 = 0$. Следовательно, число $\lambda = 0$ не является собственным числом задачи Штурма–Лиувилля.

При $\lambda > 0$

$$X(x) = C_1 \sin(\sqrt{\lambda}x) + C_2 \cos(\sqrt{\lambda}x).$$

Из краевого условия $X(0) = 0$

$$C_2 = 0.$$

Тогда $X(x) = C_1 \sin(\sqrt{\lambda}x), \quad X'(x) = C_1\sqrt{\lambda}\cos(\sqrt{\lambda}x)$. Из краевого условия $X'(l) = 0$

$$X'(l) = C_1\sqrt{\lambda}\cos(\sqrt{\lambda}l) = 0 \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ \sqrt{\lambda}l = \pi k - \pi/2 \ \Rightarrow \ \lambda_n := \frac{\pi^2(2n-1)^2}{(2l)^2}, \ n \in \mathbb{N}.$$

Следовательно, числа $\lambda_n := \frac{\pi^2(2n-1)^2}{(2l)^2}$, $n \in \mathbb{N}$, являются собственными числами задачи Штурма – Лиувилля. Соответствующие собственные функции $X_n(x) = \sin(\sqrt{\lambda_n}x)$.

2.3.4. *Краевые условия Дирихле – Робена*

Задача Штурма – Лиувилля, смешанные краевые условия Дирихле – Робена.

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0,$$

$$X(0) = X'(l) + HX(l) = 0, \quad H > 0.$$

При $\lambda < 0$, как и раньше, не имеет нетривиальных решений (упражнение).

При $\lambda = 0$

$$X(x) = C_1 x + C_2.$$

Из краевого условия $X(0) = 0$

$$C_2 = 0.$$

Тогда $X(x) = C_1 x$, $X'(x) = C_1$. Таким образом, второе краевое условие $X'(l) + HX(l) = 0$ принимает вид $C_1 + C_1 Hl = 0$ и выполняется только при $C_1 = 0$. Следовательно, число $\lambda = 0$ не является собственным числом задачи Штурма – Лиувилля.

При $\lambda > 0$

$$X(x) = C_1 \sin(\sqrt{\lambda}x) + C_2 \cos(\sqrt{\lambda}x).$$

Из краевого условия $X(0) = 0$

$$C_2 = 0.$$

Тогда $X(x) = C_1 \sin(\sqrt{\lambda}x)$, $X'(x) = C_1\sqrt{\lambda}\cos(\sqrt{\lambda}x)$. Из краевого условия $X'(l) + HX(l) = 0$

$$\sqrt{\lambda}\cos(\sqrt{\lambda}l) + H\sin(\sqrt{\lambda}l) = 0 \;\Rightarrow\; \sqrt{\lambda} = -H\,\mathrm{tg}(\sqrt{\lambda}l).$$

Это уравнение имеет бесконечно много решений. Они и будут собственными числами задачи Штурма – Лиувилля λ_n. Таким образом, далеко не всегда собственные числа имеют явный вид, как в разобранных выше случаях. Часто приходится иметь дело с собственными числами, про которые известно лишь, что они являются корнями некоторых уравнений.

Соответствующие собственные функции также содержат неявно выраженные собственные числа:

$$X_n(x) = \sin(\sqrt{\lambda}_n x),\ n \in \mathbb{N}.$$

Для прочих вариантов краевых условий для задачи Штурма–Лиувилля анализ проводится аналогично.

2.4. Решение неоднородного волнового уравнения методом Фурье

2.4.1. *Решение неоднородного волнового уравнения с однородными граничными и начальными условиями*

Неоднородное волновое уравнение имеет вид

$$u''_{tt} = a^2 u''_{xx} + f(x,t).$$

Оно описывает колебания струны при наличии внешнего воздействия (вынужденные колебания струны).

В этом пункте мы рассмотрим неоднородное волновое уравнение с однородными граничными и начальными условиями:

$$u(0,t) = u(l,t) = 0;$$

$$u(x,0) = u'_t(x,0) = 0.$$

Мы рассмотрим метод решения этого уравнения, аналогичный методу вариации произвольных постоянных для построения решения линейного неоднородного дифференциального уравнения.

Как и раньше, будем искать решение в виде $u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(t) X_n(x)$, где $X_n(x)$ — собственные функции задачи Штурма–Лиувилля

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0,$$

$$X(0) = X(l) = 0.$$

Используем уже известное нам решение этой задачи:

$$\lambda_n := \frac{\pi^2 n^2}{l^2},\ \ X_n(x) = \sin(\sqrt{\lambda}_n x),\ \ n \in \mathbb{N}$$

Будем искать $u(x,t)$ в виде

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sin(\sqrt{\lambda}_n x) \tag{4}$$

Подставляя $u(x,t)$ в исходное уравнение, получаем

$$\sum_{n=1}^{\infty} T_n''(t)\sin(\sqrt{\lambda}_n x) + a^2 T_n(t)\lambda_n \sin(\sqrt{\lambda}_n x) = f(x,t).$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (T_n''(t) + a^2\lambda_n T_n(t))\sin(\sqrt{\lambda}_n x) = f(x,t). \tag{5}$$

Разложим $f(x,t)$ в ряд Фурье по ортогональной системе функций $\sin(\sqrt{\lambda}_n x)$ (коэффициенты разложения будут зависеть от параметра t):

$$f(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} f_n(t)\sin(\sqrt{\lambda}_n x).$$

Сравнивая коэффициенты при $\sin(\sqrt{\lambda}_n x)$ в левой и правой частях уравнения (5) и учитывая ортогональность функций $\sin(\sqrt{\lambda}_n x)$ в пространстве $L^2([0,l])$, получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$T_n''(t) + a^2\lambda_n T_n(t) = f_n(t),\ n \geq 1$$

с начальными условиями $T_n(0) = T_n'(0) = 0$. Решая полученную систему (бесконечного количества!) обыкновенных дифференциальных уравнений, находим $T_n(t)$. Подставляя полученные функции в формулу (4), получаем решение исходной задачи.

2.4.2. *Решение неоднородного волнового уравнения с однородными граничными и неоднородными начальными условиями*

Будем постепенно усложнять задачу. Рассмотрим вынужденные колебания струны при однородных граничных и неоднородных начальных условиях.

$$u_{tt}'' = a^2 u_{xx}'' + f(x,t);$$

$$u(0,t) = u(l,t) = 0;$$

$$u(x,0) = f(x),\ \ u_t'(x,0) = g(x).$$

Решение этой задачи будем искать в виде суммы двух функций, каждая из которых будет нести "ответственность" за одну из неоднородностей:

$$u(x,t) = v(x,t) + w(x,t),$$

где $v(x,t)$ является решением однородного волнового уравнения

$$v''_{tt} = a^2 v''_{xx}$$

с однородными граничными условиями

$$v(0,t) = v(l,t) = 0$$

и неоднородными начальными условиями

$$v(x,0) = f(x), \;\; v'_t(x,0) = g(x),$$

а $w(x,t)$ удовлетворяет неоднородному уравнению

$$w''_{tt} = a^2 w''_{xx} + f(x,t)$$

с однородными начальными и граничными условиями

$$w(0,t) = w(l,t) = 0$$

$$w(x,0) = w'_t(x,0) = 0.$$

Методы нахождения функций $v(x,t)$ и $w(x,t)$ уже разобраны нами выше. Проверим, что сумма этих функций действительно дает решение нашей задачи:

$$u''_{tt} = v''_{tt} + w''_{tt} = a^2 v''_{xx} + a^2 w''_{xx} + f(x,t) = a^2 u''_{xx} + f(x,t).$$

Пример. В качестве примера разберем решение следующей задачи:

$$u''_{tt} = u''_{xx} + 2x \cdot \sin t,$$

$$u(0,t) = u(1,t) = 0;$$

$$u(x,0) = 0, \;\; u'_t(x,0) = x - x^2.$$

Будем искать решение в виде $u(x,t) = v(x,t) + w(x,t)$, где

$$v''_{tt} = v''_{xx},$$

$$v(0,t) = v(1,t) = 0,$$

$$v(x,0) = 0, \;\; v'_t(x,0) = x - x^2,$$

и

$$w''_{tt} = w''_{xx} + 2x \cdot \sin t$$

$$w(0,t) = w(1,t) = 0$$

$$w(x,0) = w'_t(x,0) = 0.$$

Таким образом, для решения нашей задачи достаточно найти решения двух промежуточных задач (решение этих задач разобрано нами ранее).

Ищем $v(x,t)$ в виде $X(x) \cdot T(t)$.

$$\frac{X''}{X} = \frac{T''}{T} = -\lambda.$$

$$\lambda_k = (\pi k)^2,$$

$$X_k(x) = \sin \pi k x,$$

$$T_k(t) = A_k \cos(\pi k t) + B_k \sin(\pi k t).$$

$$A_k = 0, B_k = 2/k\pi \int_0^l (x^2 - x) \sin \pi k x dx = 4/\pi^4 \cdot \frac{1-(-1)^k}{k^4}.$$

Итак, мы нашли решение первой промежуточной задачи:

$$v(x,t) = \frac{4}{\pi^4} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1-(-1)^k}{k^4} \sin(\pi k t) \sin(\pi k x).$$

Теперь перейдем к поиску второй вспомогательной функции $w(x,t)$.

Представляем $f(x,t) = 2x \cdot \sin t$ и $w(x,t)$ в виде рядов Фурье по собственным функциям однородной задачи Штурма–Лиувилля.

$$w(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} W_k(t) \sin \pi k x, \quad f(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} F_k(t) \sin \pi k x.$$

Найдем $F_k(t)$:

$$F_k = 2 \int_0^l 2x \cdot \sin t \sin \pi k x dx = 4 \sin t \int_0^l x \cdot \sin \pi k x dx =$$

$$= \frac{4(-1)^{k+1}}{\pi \cdot k} \sin t.$$

Для нахождения $W_k(t)$ осталось решить задачу Коши:

$$(W_k)''_{tt} + (\pi k)^2 W_k = \frac{4(-1)^{k+1}}{\pi \cdot k} \sin t,$$

$$W_k(0) = (W_k)'_t(0) = 0.$$

Общее решение имеет вид

$$W_k(t) = C_k \cos \pi kt + D_k \sin \pi kt + \frac{4(-1)^{k+1}}{\pi \cdot k((\pi^2 k^2 - 1))} \sin t.$$

Решая задачу Коши, получаем

$$C_k = 0, D_k = \frac{4(-1)^k}{\pi^2 \cdot k^2((\pi^2 k^2 - 1))}.$$

Итак, решение второй промежуточной задачи получено:

$$w(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4(-1)^k}{\pi \cdot k((\pi^2 k^2 - 1))} (\frac{1}{\pi k} \sin \pi kt - \sin t) \sin \pi kx.$$

Окончательное решение получаем, складывая решения промежуточных задач:

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{4(1-(-1)^k)}{\pi^4 k^4} \sin(\pi kt) + \right.$$

$$\left. + \frac{4(-1)^k}{\pi \cdot k((\pi^2 k^2 - 1))} (\frac{1}{\pi k} \sin \pi kt - \sin t) \right) \sin \pi kx.$$

2.4.3. *Решение неоднородного волнового уравнения с неоднородными граничными и начальными условиями*

Наконец, рассмотрим случай, когда неоднородно как само уравнение, так и начальные и краевые условия. Пусть дано неоднородное волновое уравнение

$$u''_{tt} = a^2 u''_{xx} + f(x,t)$$

с граничными условиями

$$u(0,t) = U_0(t), \;\; u(l,t) = U_1(t);$$

и начальными условиями

$$u(x,0) = f(x), \;\; u'_t(x,0) = g(x).$$

Решение будем искать, как и в предыдущем пункте, в виде суммы двух функций:

$$u(x,t) = v(x,t) + w(x,t).$$

Функцию $w(x,t)$ выбираем следующим образом:

$$w(x,t) = k(t)x + b(t),$$

где $k(t)$ и $b(t)$ определяются так, чтобы выполнялись следующие соотношения:

$$w(0,t) = b(t) = U_0(t), \ \ w(l,t) = k(t)l + b(t) = U_1(t),$$

т.е.

$$k(t) := \frac{U_1(t) - U_0(t)}{l},$$

$$w(x,t) = U_0(t) + x\frac{U_1(t) - U_0(t)}{l}.$$

При таком выборе w автоматически является решением следующей задачи:

$$v''_{tt} = a^2 v''_{xx} + f(x,t) - \left(U_0(t) + x\frac{U_1(t) - U_0(t)}{l}\right)''_{tt},$$

$$v(0,t) = v(l,t) = 0,$$

$$v(x,0) = f(x) - w(x,0), \ \ v'_t(x,0) = g(x) - w'_t(x,0).$$

Таким образом, функцию v можно найти, решая неоднородное волновое уравнение с однородными граничными и неоднородными начальными условиями. Метод решения такого уравнения разобран в предыдущем пункте.

2.4.4. *Резонанс*

Рассмотрим пример, показывающий, как при определенной частоте внешнего воздействия возникает резонанс. Рассмотрим неоднородное волновое уравнение

$$u''_{tt} = u''_{xx} + f(x,t)$$

с однородными граничными и начальными условиями

$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0;$$

$$u(x,0) = u'_t(x,0) = 0.$$

Собственные числа и собственные функции соответствующей задачи Штурма–Лиувилля нам уже известны:

$$\lambda_n = \frac{\pi^2 n^2}{l^2} = n^2, \quad X_n = \sin nx.$$

Предположим, что

$$f(x,t) = \sin Wt \sin 2x,$$

где $W \in \mathbb{R}$ — некоторое вещественное число. Посмотрим, как решение волнового уравнения зависит от числа W.

Как мы видели, для решения задачи нужно найти функции $T_n(t)$ такие, что

$$T_n''(t) + n^2 T_n(t) = f_n(t),$$

где $f_n(t)$ — обобщенные коэффициенты Фурье функции $f(x,t)$. В нашем случае эти коэффициенты легко находятся: $f_2(t) = \sin Wt$, а для всех $n \neq 2$ $f_n(t) = 0$.

Таким образом, нам нужно решить следующие дифференциальные уравнения:

1) при $n \neq 2$

$$T_n''(t) + n^2 T_n(t) = 0, \;\; T_n(0) = T_n'(0) = 0;$$

2) при $n = 2$

$$T_2''(t) + 4T_2(t) = \sin Wt, \;\; T_2(0) = T_2'(0) = 0.$$

Проверка того, что первому уравнению удовлетворяет только тривиальное решение $T_n(t) = 0, \;\; n \neq 2$, предоставляется читателю.

Перейдем ко второму пункту. Уравнение является линейным неоднородным уравнением второго порядка с правой частью специального вида. Характеристическое уравнение $k^2 + 4$ имеет два комплексно сопряженных корня $k_{1,2} = \pm 2i$. Общее решение однородного уравнения:

$$T_{2oo} = C_1 \sin 2t + C_2 \cos 2t.$$

Правой части соответствуют числа $a_{1,2} = \pm W$. Таким образом, при $W = 2$ числа $a_{1,2}$ будут являться корнями характеристического уравнения кратности 1.

Нерезонансная частота. Предположим, что $W \neq 2$. Следуя алгоритму решения линейных уравнений с правой частью специального вида, будем искать частное решение уравнения в виде

$$T_2^* = A \cos Wt + B \sin Wt,$$

для нахождения коэффициентов A и B подставим T_2^* в исходное уравнение

$$(T_2^*)'' + 4T_2^* = A(4 - W^2)\cos Wt + B(4 - W^2)\sin W = \sin Wt,$$

следовательно,

$$A = 0, \quad B = \frac{1}{4 - W^2}.$$

Таким образом, общее решение неоднородного уравнения имеет вид

$$T_2(t) = C_1 \sin 2t + C_2 \cos 2t + \frac{1}{4 - W^2}\sin Wt.$$

Находим константы C_1, C_2 из условий $T_n(0) = T_n'(0) = 0:$

$$C_2 = 0, \quad C_1 = \frac{W}{2(4 - W^2)}.$$

Итак,

$$T_2(t) = \frac{1}{4 - W^2}\left(\frac{W}{2}\sin 2t + \sin Wt\right).$$

Отметим, что данное решение является ограниченным при любом значении $t > 0$.

Резонансная частота Пусть теперь $W = 2$. Так как в этом случае правая часть соответствует числам, являющимся корнями характеристического уравнения, то искать частное решение уравнения будем в виде

$$T_2^* = t(A\cos 2t + B\sin 2t),$$

для нахождения коэффициентов A и B подставим T_2^* в исходное уравнение:

$$(T_2^*)' = A\cos 2t + B\sin 2t + 2t(-A\sin 2t + B\cos 2t),$$

$$(T_2^*)'' = 4(-A\sin 2t + B\cos 2t) - 4t(A\cos 2t + B\sin 2t),$$

$$(T_2^*)'' + 4T_2^* = 4(-A\sin 2t + B\cos 2t) = \sin 2t,$$

следовательно,

$$A = -1/4, \quad B = 0.$$

Таким образом, общее решение неоднородного уравнения имеет вид

$$T_2(t) = C_1 \sin 2t + C_2 \cos 2t - \frac{t}{4} \cos 2t.$$

Находим константы C_1, C_2 из условий $T_2(0) = T_2'(0) = 0:$

$$C_2 = 0, \;\; C_1 = \frac{1}{4}.$$

Итак,

$$T_2(t) = \frac{1}{4} \sin 2t - \frac{t}{4} \cos 2t.$$

Из-за того, что во втором слагаемом перед косинусом стоит множитель t, видим, что

$$\lim_{t \to \infty} |T_2(t)| = \infty.$$

Таким образом, решение волнового уравнения в этом случае имеет вид

$$u(x,t) = \left(\frac{1}{4} \sin 2t - \frac{t}{4} \cos 2t \right) \sin 2x,$$

амплитуда колебаний неограниченно растет с ростом t, в этом случае имеет место резонанс.

3. УРАВНЕНИЕ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

3.1. Однородное уравнение теплопроводности. Метод Фурье

Рассмотрим однородное уравнение теплопроводности

$$u_t' = a^2 u_{xx}'', \;\; 0 < x < l, \; t \geq 0,$$

с начальным условием

$$u(x,0) = U_0(x),$$

и граничными условиями (Дирихле)

$$u(0,t) = U_1(t), \; u(l,t) = U_2(t).$$

3.1.1. *Однородные граничные условия Дирихле*

Рассмотрим задачу с однородными граничными условиями

$$u(0,t) = u(l,t) = 0.$$

Будем решать задачу методом Фурье. Ищем решение в виде

$$U(x,t) = X(x)T(t),$$

подставляем в уравнение

$$u'_t = a^2 u''_{xx},$$

разделяем переменные

$$\frac{X''}{X} = \frac{1}{a^2}\frac{T'}{T} = -\lambda.$$

Приходим к той же задаче Штурма–Лиувилля, которую уже решали при изучении уравнения струны.

Ее собственные значения

$$\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2,$$

собственные функции

$$X_n(x) = \sin(\sqrt{\lambda_n} x).$$

Ищем $T_n(t)$ из уравнения

$$T'_n(t) + \lambda_n a^2 T_n(t) = 0.$$

Разделяем переменные:

$$\frac{dT_n}{T_n} = -\lambda_n a^2 dt,$$

$$T_n(t) = A_n \exp(-\lambda_n a^2 t).$$

Таким образом, общее решение однородного уравнения теплопроводности имеет вид

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \exp(-\lambda_n a^2 t) \sin(\sqrt{\lambda_n} x).$$

Эта функция удовлетворяет заданным граничным условиям. Коэффициенты A_n нужно подобрать так, чтобы решение $u(x,t)$ удовлетворяло начальному условию:

$$u(x,0) = U_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n X_n(x).$$

Таким образом, в качестве A_n следует взять коэффициенты Фурье функции $U_0(x)$ по ортогональной системе $X_n(x)$:

$$A_n := \frac{(U_0(x), X_n(x))}{\|X_n(x)\|^2} = \frac{2}{l}\int_0^l U_0(x)X_n(x)dx.$$

Окончательно получаем

$$u(x,t) = \frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty} A_n \exp(-\lambda_n a^2 t)\sin(\sqrt{\lambda_n}x) =$$

$$= \frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\int_0^l U_0(\zeta)\sin(\sqrt{\lambda_n}\zeta)d\zeta \cdot \exp(-\lambda_n a^2 t)\sin(\sqrt{\lambda_n}x)\right\}.$$

3.1.2. *Функция Грина*

Введем следующее определение

Определение. *Функция*

$$G(x,\zeta,t) = \frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\exp\left(-a^2(\frac{\pi n}{l})^2 t\right)\sin\frac{\pi n x}{l}\sin\frac{\pi n\zeta}{l}$$

называется функцией мгновенного источника тепла или **функцией Грина** *для уравнения теплопроводности.*

Физический смысл *этой функции можно описать следующим образом: пусть дан стержень с нулевой начальной температурой, на концах которого на протяжении всего эксперимента поддерживается нулевая температура; предположим, что в точке ζ стержня в начальный момент времени $t = 0$ мгновенно вводится некоторое количество тепла, тогда в момент времени t распределение температуры в стержне описывается функцией $G(x,\zeta,t)$ (рассматриваемой как функция от переменной x при фиксированных t и ζ).*

С использованием функции Грина решение однородного уравнения теплопроводности с однородными краевыми условиями Дирихле и неоднородным начальным условием можно записать следующим образом:

$$u(x,t) = \int_0^l U_0(\zeta)G(x,\zeta,t)d\zeta. \tag{6}$$

3.1.3. *Однородные граничные условия Дирихле – Неймана*

Рассмотрим другой вариант однородных граничных условий:

$$u'_t = a^2 u''_{xx}, \;\; 0 < x < l, \; t \geq 0,$$

с начальным условием

$$u(x,0) = U_0(x),$$

и однородными граничными условиями (Дирихле – Неймана)

$$u(0,t) = 0, \; u'_x(l,t) = 0.$$

Ищем решение в виде

$$U(x,t) = X(x)T(t).$$

Как и раньше, получаем задачу Штурма – Лиувилля

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0,$$

причем теперь из граничных условий на функцию $U(x,t)$ следует:

$$X(0) = X'(l) = 0.$$

Итак, получаем задачу Штурма – Лиувилля с граничными условиями Дирихле – Неймана:

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0,$$

$$X(0) = X'(l) = 0.$$

Собственные значения этой задачи:

$$\lambda_n = \left(\frac{\pi(2n-1)}{2l}\right)^2,$$

ее собственные функции:

$$X_n(x) = \sin\left(\frac{\pi(2n-1)}{2l}x\right).$$

Подставляя функцию

$$u_n(x,t) = X_n(x)T_n(t) =$$

$$= \sin\left(\frac{\pi(2n-1)}{2l}x\right)T_n(t) = \sin(\sqrt{\lambda_n}x)T_n(t)$$

в исходное уравнение

$$u'_t = a^2 u''_{xx},$$

получаем

$$\sin(\sqrt{\lambda_n}x)T'_n(t) = -\lambda_n \sin(\sqrt{\lambda_n}x)T_n(t).$$

Ищем $T_n(t)$ из уравнения

$$T'_n(t) + \lambda_n a^2 T_n(t) = 0.$$

Разделяем переменные:

$$\frac{dT_n}{T_n} = -\lambda_n a^2 dt.$$

Решение имеет вид

$$T_n(t) = A_n \exp(-\lambda_n a^2 t).$$

Таким образом, общее решение однородного уравнения теплопроводности будет следующим:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \exp(-\lambda_n a^2 t)\sin(\sqrt{\lambda_n}x).$$

Из начального условия найдем A_n:

$$u(x,0) = U_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n X_n(x),$$

таким образом, A_n являются коэффициентами Фурье функции $U_0(x)$ по ортогональной системе $X_n(x)$:

$$A_n := \frac{(U_0(x), X_n(x))}{\|X_n(x)\|^2} = \frac{2}{l}\int_0^l U_0(x)X_n(x)dx.$$

Окончательно получаем

$$u(x,t) = \frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty} A_n \exp(-\lambda_n a^2 t)\sin(\sqrt{\lambda_n}x) =$$

$$= \frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\int_0^l U_0(\zeta)\sin(\sqrt{\lambda_n}\zeta)d\zeta \cdot \exp(-\lambda_n a^2 t)\sin(\sqrt{\lambda_n}x)\right\}.$$

3.2. Неоднородное уравнение теплопроводности

Перейдем к решению неоднородного уравнения теплопроводности при однородных граничных условиях

$$u'_t = a^2 u''_{xx} + F(x,t),\ \ 0 < x < l,\ t \geq 0,$$

с однородным начальным условием

$$u(x,0) = 0,$$

и однородными граничными условиями

$$u(0,t) = 0,\ u(l,t) = 0.$$

Первый этап решения. Для соответствующего однородного уравнения

$$u'_t = a^2 u''_{xx},$$
$$u(0,t) = 0,\ u(l,t) = 0$$

находим собственные числа и собственные функции задачи Штурма–Лиувилля

$$\lambda_n = (\frac{\pi n}{l})^2,$$
$$X_n(x) = sin\frac{\pi n x}{l}.$$

Второй этап решения. Решение исходной задачи ищем в виде

$$u(t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t),$$

$$u_n(x,t) = X_n(x)T_n(t)$$

(т.е. $T_n(t)$ играют роль обобщенных коэффициентов Фурье в разложении искомой функции $u(x,t)$ по ортогональной системе собственных функций задачи Штурма–Лиувилля $X_n(x)$).

Третий этап решения. Разложим $F(x,t)$ в обобщенный ряд Фурье по собственным функциям задачи Штурма–Лиувилля:

$$F(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(t) X_n(x).$$

Домножим обе части равенства скалярно на X_k (в скалярном произведении при этом проводится интегрирование по x, переменная t играет роль параметра):

$$(F(x,t), X_k(x)) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(t)(X_n(x), X_k(x)).$$

Учитывая ортогональность собственных функций задачи Штурма–Лиувилля ($(X_n, X_k) = 0$ при $n \neq k$), находим

$$F_k(t) = \frac{(F(x,t), X_k(x))}{\|X_k\|^2} = \frac{2}{l}\int_0^l F(\zeta,t)\sin\frac{\pi k\zeta}{l} d\zeta.$$

Подставляя в исходное уравнение, получаем

$$\sum_{n=1}^{\infty} X_n(x)T_n'(t) = -a^2\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{\pi n}{l})^2 X_n(x)T_n(t) + \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x)F_n(t).$$

Сравнивая обобщенные коэффициенты Фурье в левой и правой частях, получаем уравнение для нахождения $T_n(t)$:

$$T_n'(t) = -a^2(\frac{\pi n}{l})^2 T_n(t) + F_n(t).$$

Это линейное неоднородое уравнение первого порядка. С учетом начального условия $u_n(x,0) = X_n(x)T_n(0) = 0$ нам нужно найти решение задачи Коши:

$$T_n(0) = 0.$$

Из курса дифференциальных уравнений известно:

$$T_n(t) = \int_0^t \exp\left(-a^2(\frac{\pi n}{l})^2(t-s)\right) F_n(s)ds.$$

Подставляя все найденные выражения, получаем

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x)T_n(t) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_0^t \exp\left(-a^2 (\frac{\pi n}{l})^2 (t-s) \right) F_n(s) ds \right] X_n(x),$$

где

$$F_n(t) = \frac{2}{l} \int_0^l F(\zeta, t) \sin \frac{\pi n \zeta}{l} d\zeta m, \quad X_n(x) = \sin \frac{\pi n x}{l}.$$

Подставив выражение для F_n, получим

$$u(x,t) = \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t \int_0^l \exp\left(-(\frac{a\pi n}{l})^2 (t-s) \right) \sin \frac{\pi n \zeta}{l} \sin \frac{\pi n x}{l} F(\zeta, s) d\zeta ds.$$

С использованием функции Грина решение исходной задачи может быть записано в виде

$$u(x,t) = \int_0^t \int_0^l G(x, \zeta, t-s) F(\zeta, s) d\zeta ds.$$

4. УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА И ПУАССОНА

4.1. Оператор Лапласа, гармонические функции

Определение. *Двумерным* **оператором Лапласа** *функции* $u(x,y)$ *называется дифференциальный оператор второго порядка, заданный формулой*

$$\Delta u = div\ (grad\, u).$$

Уравнение

$$\Delta u = f$$

называется **уравнением Пуассона***,*

Уравнением Лапласа *называют однородное уравнение Пуассона:*

$$\Delta u = 0.$$

Напомним, что в *декартовой системе координат* оператор Лапласа функции $u(x,y)$ приобретает вид

$$\Delta u = \mathrm{div}(\mathrm{grad}\ u) = \nabla(\nabla u) = \nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = u''_{xx} + u''_{yy}.$$

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ — плоская область с границей Γ.

Уравнение Пуассона описывает многие стационарные (т.е. не зависящие от времени, установившиеся) физические процессы. Например, стационарное распределение температуры сплошной среды, установившееся течение жидкости и т.п.

4.1.1. *Гармонические функции*

Как видно из уравнения Пуассона, разность любых двух его решений удовлетворяет уравнению Лапласа: если $\Delta g_1 = f$ и $\Delta g_2 = f$, то для $h = g_1 - g_2$ получим

$$\Delta h = \Delta g_1 - \Delta g_2 = f - f = 0.$$

Определение. *Функция, непрерывная в области Ω вместе с производными до второго порядка (включительно), называется* **гармонической***, если она удовлетворяет в этой области уравнению Лапласа $\Delta u = 0$.*

Свойства гармонических функций.

1. **Принцип максимума.** Функция, гармоническая в области Ω, не может достигать своего максимума (минимума) во внутренней точке области. Другими словами, максимальное (минимальное) значение всегда достигается на границе.

2. **Дифференцируемость.** Гармоническая функция бесконечно дифференцируема в области Ω.

3. **Теорема о среднем**. Если функция является гармонической в некотором круге D с центром в точке $M_0(x_0, y_0)$ и радиусом R, то среднее значение этой функции на окружности (а также среднее значение в круге) совпадает со значением функции в центре круга:

$$u(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi R} \int_0^{2\pi} u(x_0 + R\cos\varphi, y_0 + R\sin\varphi) d\varphi;$$

$$u(x_0, y_0) = \frac{1}{\pi R^2} \iint_D u(x, y) dx\, dy.$$

4. **Теорема Лиувилля.** Функция, гармоническая и ограниченная сверху и снизу во всей плоскости, является постоянной.

4.1.2. *Оператор Лапласа в полярной системе координат*

При решении некоторых задач удобно пользоваться полярной системой координат (например, когда область $Omega$ является кольцом или круговым сектором.) Напомним, что декартовы и полярные координаты связаны формулами

$$x = r\cos\varphi;\ y = r\sin\varphi.$$

Оператор Лапласа в полярной системе координат имеет вид

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}.$$

4.2. Краевые задачи для уравнения Лапласа

Пусть, как и раньше, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ — плоская область с границей Γ. Обозначим через $\vec{n}$ вектор внешней нормали к Γ.

Определение. Задача Дирихле *для уравнения Лапласа в плоской области заключается в поиске решения уравнения Лапласа*

$$\Delta u = 0,$$

удовлетворяющего граничному условию

$$u(x,y)\,\big|_{(x,y)\in\Gamma} = f(x,y).$$

Определение. Задача Неймана *для уравнения Лапласа в плоской области заключается в поиске решения уравнения Лапласа*

$$\Delta u = 0,$$

удовлетворяющего граничному условию

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial\vec{n}}\,\big|_{(x,y)\in\Gamma} = g(x,y).$$

4.3. Решение задачи Дирихле в круговом секторе методом Фурье

Найдем решение уравнения Лапласа

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi} = 0$$

в круговом секторе $0 \le r \le r_0,\ 0 \le \varphi \le \alpha \in (0, 2\pi),$ *удовлетворяющее следующим граничным условиям*

$$u(r_0, \varphi) = f(\varphi),\ \ u(r, 0) = u(r, \alpha) = 0.$$

Будем искать решение в виде

$$u(r, \varphi) = R(r) \cdot \Phi(\varphi).$$

Тогда

$$\frac{\partial u}{\partial r} = R' \cdot \Phi, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} = R'' \cdot \Phi, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = R \cdot \Phi''.$$

Подставляем в уравнение Лапласа

$$R'' \cdot \Phi + \frac{1}{r} \cdot R' \cdot \Phi + \frac{1}{r^2} \cdot R \cdot \Phi'' = 0.$$

Преобразуя уравнение, разделяем переменные:

$$R'' \cdot \Phi + \frac{1}{r} \cdot R' \cdot \Phi + \frac{1}{r^2} \cdot R \cdot \Phi'' = 0;$$

$$\Phi \cdot \left(R'' + \frac{1}{r} \cdot R' \right) + \frac{1}{r^2} \cdot R \cdot \Phi'' = 0;$$

$$\Phi \cdot \left(r^2 R'' + r \cdot R' \right) = -R \cdot \Phi'';$$

$$\frac{r^2 R'' + r \cdot R'}{R} = -\frac{\Phi''}{\Phi}.$$

Левая часть уравнения зависит только от r, правая — только от φ, следовательно, обе части постоянны:

$$\frac{r^2 R'' + r \cdot R'}{R} = -\frac{\Phi''}{\Phi} = \lambda.$$

Из граничных условий следует, что

$$\Phi(0) = \Phi(\alpha) = 0;\ \ R(r_0)\Phi(\varphi) = f(\varphi)$$

Решаем уравнение $\Phi'' + \lambda\Phi = 0$: при $\lambda = 0$

$$\Phi(\varphi) = a\varphi + b,$$

при $\lambda < 0$
$$\Phi(\varphi) = Ce^{\sqrt{-\lambda}\varphi} + Be^{-\sqrt{-\lambda}\varphi},$$
В этих случаях граничному условию удовлетворяют только тривиальные решения.

Решаем уравнение $\Phi'' + \lambda\Phi = 0$ при $\lambda > 0$:
$$\Phi(\varphi) = A\cos(\sqrt{\lambda}\varphi) + B\sin(\sqrt{\lambda}\varphi),$$
Подставляем граничные условия $\Phi(0) = \Phi(\alpha) = 0$:
$$\Phi(0) = 0 = A,$$
$$\Phi(\alpha) = 0 = B \cdot \sin(\sqrt{\lambda}\alpha).$$
Нетривиальные решения будут при $\sqrt{\lambda}\alpha = \pi n,\ n \in \mathbb{N}$.

Итак, мы нашли:

- собственные числа задачи Штурма–Лиувилля
$$\lambda_n := \left(\frac{\pi n}{\alpha}\right)^2,$$
- соответствующие собственные функции
$$\Phi_n := \sin(\sqrt{\lambda_n}\varphi).$$

Собственные функции Φ_n образуют ортогональный базис в пространстве $L^2[0, \alpha]$ со скалярным произведением
$$(f, g) = \int_0^\alpha f(t)g(t)dt.$$

Решаем второе уравнение
$$r^2R'' + r \cdot R' - \lambda R = 0.$$
Подставляем $\lambda = \lambda_n$:
$$r^2R'' + r \cdot R' - \left(\frac{\pi n}{\alpha}\right)^2 R = 0.$$
Это уравнение называется дифференциальным уравнением Эйлера. Его решение следует искать в виде
$$R = r^k.$$

Подставляя в исходное уравнение, получаем

$$r^2 \cdot k(k-1)r^{k-2} + r \cdot kr^{k-1} - \left(\frac{\pi n}{\alpha}\right)^2 r^k = 0,$$

$$k^2 = \left(\frac{\pi n}{\alpha}\right)^2.$$

$$k = \pm\frac{\pi n}{\alpha}.$$

Таким образом,

$$R_n(r) = C_n r^{\frac{\pi n}{\alpha}} + D_n r^{-\frac{\pi n}{\alpha}}.$$

Из граничных условий следует, что $R_n(0) = 0$. Следовательно, $D_n = 0$.

Итак,

$$u_n(r,\varphi) = R_n \cdot \Phi_n = C_n r^{\frac{\pi n}{\alpha}} \cdot \sin(\sqrt{\lambda_n}\varphi).$$

Общим решением уравнения является функция

$$u(r,\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(r,\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n r^{\frac{\pi n}{\alpha}} \cdot \sin(\sqrt{\lambda_n}\varphi),$$

где коэффициенты C_n определяются из условия

$$u(r_0,\varphi) = f(\varphi).$$

Находим коэффициенты C_n

$$f(\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n r_0^{\frac{\pi n}{\alpha}} \cdot \sin(\sqrt{\lambda_n}\varphi).$$

Таким образом, числа $C_n r_0^{\frac{\pi n}{\alpha}}$ являются обобщенными коэффициентами Фурье разложения функции $f(\varphi)$ по системе собственных функций задачи Штурма–Лиувилля $\Phi_n = \sin(\sqrt{\lambda_n}\varphi)$.

$$C_n r_0^{\frac{\pi n}{\alpha}} = \frac{(f,\Phi_n)}{\|\Phi_n\|^2},$$

$$C_n = r_0^{-\frac{\pi n}{\alpha}} \frac{(f,\Phi_n)}{\|\Phi_n\|^2}.$$

Итак, мы получили решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа в круговом секторе:

$$u(r,\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n \left(\frac{r}{r_0}\right)^{\frac{\pi n}{\alpha}} \cdot \sin(\frac{\pi n}{\alpha}\varphi),$$

где

$$F_n = \frac{(f,\Phi_n)}{\|\Phi_n\|^2}.$$

4.4. Решение задачи Неймана в круговом секторе методом Фурье

Решение задачи Неймана рассмотрим на конкретном примере.

Найдем решение уравнения Лапласа

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi} = 0$$

в круговом секторе $0 \le r \le 3,\ 0 \le \varphi \le 5\pi/6$, *удовлетворяющее следующим граничным условиям:*

$$u(r_0,\varphi) = 12\cos(6\varphi),\ \ u'_\varphi(r,0) = u'_\varphi(r,5\pi/6) = 0.$$

Решение ищем в виде $u = R\cdot\Phi$. Разделяем переменные в уравнении Лапласа, получаем

$$\frac{r^2\cdot R'' + r\cdot R'}{R} = -\frac{\Phi''}{\Phi} = \lambda.$$

Решаем уравнение

$$\Phi'' + \lambda\Phi = 0.$$

Из граничных условий следует:

$$\Phi'(0) = \Phi'(5\pi/6) = 0.$$

Это задача Штурма – Лиувилля с краевыми условиями Неймана.

Собственные числа

$$\lambda_0 = 0,$$

$$\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{5\pi/6}\right)^2 = \left(\frac{6n}{5}\right)^2,$$

Собственные функции

$$\Phi_0 = 1,$$

$$\Phi_n = \cos(\sqrt{\lambda_n}\varphi).$$

При найденных λ_n решаем уравнение

$$r^2 \cdot R'' + r \cdot R' - \lambda_n R = 0.$$

Общее решение:

$$R_n(r) = C_n r^{\frac{\pi n}{\alpha}} + D_n r^{-\frac{\pi n}{\alpha}}.$$

Из граничных условий следует, что R_n ограничена. Следовательно, $D_n = 0$.

Итак,

$$u_n(r,\varphi) = R_n \cdot \Phi_n = C_n r^{\frac{\pi n}{\alpha}} \cdot \cos(\sqrt{\lambda_n}\varphi), \quad n = 0, 1, 2, ...$$

Итак,

$$u(r,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n r^{\frac{\pi n}{\alpha}} \cdot \cos(\sqrt{\lambda_n}\varphi),$$

где коэффициенты C_n определяются из условия

$$u(3,\varphi) = 12\cos(6\varphi).$$

Найдем коэффициенты C_n:

$$12\cos(6\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n 3^{\frac{\pi n}{\alpha}} \cdot \cos(\sqrt{\lambda_n}\varphi).$$

Таким образом, числа $C_n r_0^{\frac{\pi n}{\alpha}}$ являются обобщенными коэффициентами Фурье разложения функции $f(\varphi) = 12\cos(6\varphi)$ по системе собственных функций задачи Штурма–Лиувилля $\Phi_n = \cos(\sqrt{\lambda_n}\varphi), n = 0, 1, ...$

$$C_n = 3^{-\frac{\pi n}{\alpha}} \frac{(f, \Phi_n)}{\|\Phi_n\|^2}.$$

Введем обозначение

$$F_n = \frac{(f, \Phi_n)}{\|\Phi_n\|^2}.$$

Тогда решение задачи Неймана примет вид

$$u(r,\varphi)=\sum_{n=1}^{\infty}F_n\left(\frac{r}{3}\right)^{\frac{\pi n}{\alpha}}\cdot\cos\left(\frac{6n}{5}\varphi\right),$$

Найдем коэффициенты F_n:

$$\|\Phi_n\|^2=\int_0^{5\pi/6}\cos^2\left(\frac{6n}{5}\varphi\right)d\varphi=5\pi/12,$$

$$(f,\Phi_n)=\int_0^{5\pi/6}12\cos(6\varphi)\cos\left(\frac{6n}{5}\varphi\right)d\varphi=5\pi\cdot\delta_{n,5};$$

таким образом

$$F_5=1/12,\quad F_n=0,n\neq 5.$$

На рисунке 1 изображен график функции $u(r,\varphi)$.

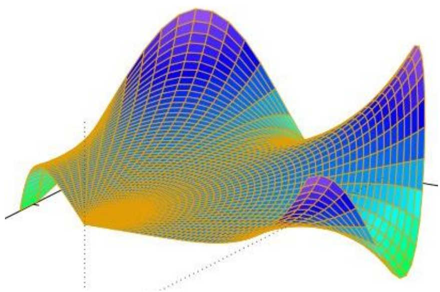

Рис. 1:

4.5. Решение задачи Дирихле в круге методом Фурье

Найдем решение уравнения Лапласа

$$\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi}=0$$

в круге $0\leq r\leq r_0$, *удовлетворяющее граничному условию*

$$u(r_0,\varphi)=f(\varphi).$$

Будем искать решение в виде

$$u(r,\varphi) = R(r)\cdot\Phi(\varphi).$$

Подставляем в уравнение Лапласа, разделяем переменные:

$$\frac{r^2\cdot R'' + r\cdot R'}{R} = -\frac{\Phi''}{\Phi} = \lambda.$$

Функция Φ имеет период 2π:

$$\Phi(0) = \Phi(2\pi).$$

Решаем уравнение $\Phi'' + \lambda\Phi = 0$.

При $\lambda = 0$

$$\Phi_0(\varphi) = a\varphi + b,$$

Условию периодичности эта функция удовлетворяет при $a = 0$.

При $\lambda < 0$

$$\Phi(\varphi) = e^{\sqrt{-\lambda}\varphi} + Be^{-\sqrt{-\lambda}\varphi},$$

В этом случае условию периодичности удовлетворяет только тривиальное решение.

Решаем уравнение $\Phi'' + \lambda\Phi = 0$ при $\lambda > 0$:

$$\Phi(\varphi) = A\cos(\sqrt{\lambda}\varphi) + B\sin(\sqrt{\lambda}\varphi),$$

Из условия периодичности следует, что $\lambda_n = n^2,\ \ n\in\mathbb{N}$. Тогда

$$\Phi_n := A_n\cos(n\varphi) + B_n\sin(n\varphi).$$

Решаем второе уравнение

$$r^2R'' + r\cdot R' - nR = 0.$$

При $n \neq 0$ это, как и раньше, уравнение Эйлера. Его решения ищем в виде

$$R = r^k:$$

$$R_n(r) = C_n r^n + D_n r^{-n}.$$

При $n = 0$ уравнение принимает вид $r^2R'' + r\cdot R' = 0$.

Сделаем замену:

$$y = R';$$

$$r^2 y' = -ry;$$
$$\frac{dy}{y} = -\frac{dr}{r};$$
$$\ln y = \ln R' = \ln D_0 - \ln r;$$
$$R' = D_0/r;$$
$$R_0 = C_0 + D_0 \ln r.$$

$$u_n(r,\varphi) = (C_n r^n + D_n r^{-n})(A_n \cos(n\varphi) + B_n \sin(n\varphi)), \quad n \in \mathbb{N};$$
$$u_0(r,\varphi) = (C_0 + D_0 \ln r).$$

Из условия непрерывности функции $u(r,\varphi)$ следует ее ограниченность в точке 0. Следовательно, необходимо положить

$$D_n = 0.$$

Таким образом,

$$u(r,\varphi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (a_n \cos(n\varphi) + b_n \sin(n\varphi)),$$

где коэффициенты a_n, b_n определяются из условия $u(r_0,\varphi) = f(\varphi)$ следующим образом:

$$f(\varphi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r_0^n (a_n \cos(n\varphi) + b_n \sin(n\varphi)),$$
$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)dt,$$
$$a_n = \frac{1}{\pi r_0^n}\int_0^{2\pi} f(t)\cos(nt)dt,$$
$$b_n = \frac{1}{\pi r_0^n}\int_0^{2\pi} f(t)\sin(nt)dt,$$

Подставим полученные коэффициенты в формулу для $u(r,\varphi)$:

$$u(r,\varphi) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)dt + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{r_0}\right)^n \int_0^{2\pi} f(t)\cos n(\varphi - t)dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)dt + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{r_0}\right)^n \int_0^{2\pi} f(t)Re(e^{in(\varphi-t)})dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)dt + Re\left[\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{r_0}\right)^n e^{in(\varphi-t)}dt\right].$$

Используя формулу суммы геометрической прогрессии, полученное выражение можно записать в следующем компактном виде:

Определение. Формула Пуассона

$$u(r,\varphi) = \frac{r_0^2 - r^2}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{f(t)}{r_0^2 - 2rr_0\cos(\varphi - t) + r^2}dt.$$

4.6. Задача Дирихле для уравнения Лапласа в прямоугольной области

Будем решать следующую задачу: найти решение уравнения Лапласа

$$\Delta u = 0,$$

удовлетворяющее граничным условиям

$$u(0,y) = 0, \;\; u(a,y) = 0,$$

$$u(x,0) = U_0(x), \;\; u(x,b) = U_1(x).$$

Решаем методом Фурье. Ищем решение в виде

$$u(x,y) = X(x)\cdot Y(y).$$

Подставляем, разделяем переменные:

$$\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = -\lambda.$$

Таким образом, $X(x)$ — собственные функции задачи Штурма–Лиувилля

$$X'' + \lambda X = 0$$

с граничными условиями Дирихле

$$X(0) = X(a) = 0.$$

Следовательно,

$$\lambda_n = \frac{\pi n}{a}, \quad n \in \mathbb{N},$$

$$X_n(x) = \sin\frac{\pi n x}{a}.$$

Для нахождения $Y(y)$ решаем второе уравнение:

$$Y'' - \left(\frac{\pi n}{a}\right)^2 Y_n = 0.$$

Составляем характеристическое уравнение

$$k^2 - \left(\frac{\pi n}{a}\right)^2 = 0.$$

Фундаментальную систему решений образуют функции

$$\operatorname{ch}\frac{\pi n y}{a}, \quad \operatorname{sh}\frac{\pi n y}{a}.$$

Получаем

$$Y_n = A_n \operatorname{ch}\frac{\pi n y}{a} + B_n \operatorname{sh}\frac{\pi n y}{a}.$$

Итак, получили решение уравнения Лапласа в прямоугольной области в виде

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n \operatorname{ch}\frac{\pi n y}{a} + B_n \operatorname{sh}\frac{\pi n y}{a}\right)\sin\frac{\pi n x}{a}.$$

Коэффициенты A_n, B_n находим из граничных условий при $y = 0$ и $y = b$:

$$u(x,0) = U_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\frac{\pi n x}{a},$$

$$u(x,b) = U_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n \operatorname{ch}\frac{\pi n b}{a} + B_n \operatorname{sh}\frac{\pi n b}{a}\right)\sin\frac{\pi n x}{a}.$$

Таким образом, A_n — это обобщенные коэффициенты Фурье в разложении по собственным функциям задачи Штурма–Лиувилля $X_n(x) = \sin\frac{\pi n x}{a}$ для $U_0(x)$:

$$A_n = \frac{(U_0, X_n)}{\|X_n\|^2},$$

Найдем обобщенные коэффициенты Фурье в разложении по собственным функциям задачи Штурма–Лиувилля для $U_1(x)$:

$$C_n := \frac{(U_1, X_n)}{\|X_n\|^2},$$

тогда

$$A_n \operatorname{ch} \frac{\pi n b}{a} + B_n \operatorname{sh} \frac{\pi n b}{a} = C_n,$$

и, следовательно,

$$B_n = \frac{C_n - A_n \operatorname{ch} \frac{\pi n b}{a}}{\operatorname{sh} \frac{\pi n b}{a}}.$$

График найденной функции $u(x, y)$ приведен на рисунке 2.

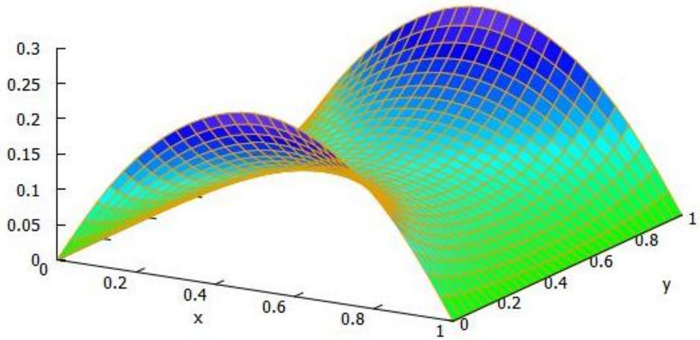

Рис. 2:

4.7. Нестационарный случай

4.7.1. *Колебания прямоугольной мембраны*

До сих пор мы решали только стационарные задачи, связанные с оператором Лапласа. Теперь перейдем к нестационарной задаче.

Определение. Уравнение свободных колебаний мембраны

$$u''_{tt} = a^2 \Delta u.$$

Определение. Задача о свободных колебаниях прямоугольной мембраны *заключается в нахождении функции* $u(x, y, t)$ *такой, что:*

$$u''_{tt} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right),$$

$$u(0, y, t) = u(l_1, y, t) = u(x, 0, t) = u(x, l_2, t) = 0,$$

$$u(x, y, 0) = f(x, y); \;\; u'_t(x, y, 0) = g(x, y).$$

Метод разделения переменных. Ищем решения вида

$$u(x, y, t) = X(x) \cdot Y(y) \cdot T(t).$$

Подставляем в исходное уравнение:

$$X \cdot Y \cdot T'' = a^2 (X'' \cdot Y \cdot T + X \cdot Y'' \cdot T);$$

разделяем переменные (делим на $X \cdot Y \cdot T \cdot a^2$):

$$\frac{T''}{a^2 T} = \frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y}.$$

В уравнении

$$\frac{T''}{a^2 T} = \frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y}$$

правая часть, а также каждое слагаемое левой части обязаны быть постоянными слагаемыми (упражнение: почему?).

Пусть

$$\frac{X''}{X} = -\mu,$$

$$\frac{Y''}{Y} = -\nu.$$

Тогда
$$\frac{T''}{T} = -\lambda, \text{ где } \lambda = a^2(\mu + \nu).$$
Из граничных условий на $u(x, y, t)$ следует, что
$$X(0) = X(l_1) = Y(0) = Y(l_2) = 0.$$
Отсюда получаем
$$\mu_m = \left(\frac{\pi m}{l_1}\right)^2; \;\; X_m(x) = sin(\sqrt{\mu_m}x) = sin(\frac{\pi m}{l_1}x)$$
$$\nu_n = \left(\frac{\pi n}{l_2}\right)^2; \;\; Y_n(y) = sin(\sqrt{\nu_n}y) = sin(\frac{\pi m}{l_2}y).$$
Тогда
$$\lambda_{mn} = a^2(\mu_m + \nu_n) = a^2\pi^2\left(\frac{m^2}{l_1^2} + \frac{n^2}{l_2^2}\right).$$
$$T_{m,n} = A_{mn}\cos(\lambda_{mn} \cdot t) + B_{mn}\sin(\lambda_{mn} \cdot t).$$
Таким образом, функции
$$u_{m,n} = T_{m,n}X_mY_n$$
удовлетворяют уравнению колебания мембраны и граничным условиям. Решение исходной задачи (с начальными условиями) ищем в виде
$$u(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} u_{m,n}.$$
Для нахождения A_{mn}, B_{mn} используем начальные условия
$$u(x, y, 0) = f(x, y); \;\; u'_t(x, y, 0) = g(x, y).$$
Таким образом,
$$f(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} X_m(x)Y_n(y)T_{m,n}(0)$$
$$g(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} X_m(x)Y_n(y)T'_{m,n}(0)$$

так как

$$T_{m,n}(0) = A_{m,n},$$

$$T'_{m,n}(0) = (A_{mn}\cos(\sqrt{\lambda_{mn}}\cdot t) + B_{mn}\sin(\sqrt{\lambda_{mn}}\cdot t))'_t|_{t=0} = B_{m,n}\sqrt{\lambda_{m,n}},$$

то

$$f(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} X_m(x)Y_n(y)A_{m,n},$$

$$g(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} X_m(x)Y_n(y)B_{m,n}\sqrt{\lambda_{m,n}}.$$

Коэффициенты ищем по формулам

$$A_{m,n} = \frac{4}{l_1 l_2}\int_0^{l_1}\int_0^{l_2} f(x,y)X_m(x)Y_n(y)dxdy$$

$$B_{m,n} = \frac{4}{l_1 l_2\sqrt{\lambda_{m,n}}}\int_0^{l_1}\int_0^{l_2} g(x,y)X_m(x)Y_n(y)dxdy$$

4.7.2. *Распространение тепла в прямоугольной пластине*

Рассмотрим прямоугольную пластину. Температуру в точке с координатами (x, y) в момент времени t будем обозначать $u(x, y, t)$. Пусть известно распределение температуры в начальный момент времени $u(x, y, 0) = f(x, y)$, а на краях пластины поддерживается нулевая температура. Рассмотрим уравнение теплопроводности:

$$u'_t = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right),$$

$$u(0,y,t) = u(l_1,y,t) = u(x,0,t) = u(x,l_2,t) = 0,$$

$$u(x,y,0) = f(x,y).$$

Решая, как и раньше, методом Фурье, получим

$$\mu_m = \left(\frac{\pi m}{l_1}\right)^2;\ \ X_m(x) = sin(\sqrt{\mu_m}x) = sin(\frac{\pi m}{l_1}x)$$

$$\nu_n = \left(\frac{\pi n}{l_2}\right)^2;\ \ Y_n(y) = sin(\sqrt{\nu_n}x) = sin(\frac{\pi m}{l_2}y)$$

Для T получаем уравнение

$$\frac{T'}{T} = -\lambda, \text{ где } \lambda = a^2(\mu + \nu)$$

$$T_{m,n} = A_{mn} e^{-\lambda_{mn} \cdot t}.$$

Таким образом, функции

$$u_{m,n} = T_{m,n} X_m Y_n$$

удовлетворяют уравнению колебания мембраны и граничным условиям. Решение исходной задачи (с начальными условиями) ищем в виде

$$u(x,y,t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} u_{m,n}$$

Для нахождения A_{mn}, B_{mn} используем начальные условия

$$u(x,y,0) = f(x,y).$$

Таким образом,

$$f(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} X_m(x) Y_n(y) T_{m,n}(0)$$

так как

$$T_{m,n}(0) = A_{m,n},$$

то

$$f(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} X_m(x) Y_n(y) A_{m,n},$$

Коэффициенты ищем по формулам

$$A_{m,n} = \frac{4}{l_1 l_2} \int_0^{l_1} \int_0^{l_2} f(x,y) X_m(x) Y_n(y) dxdy$$

4.7.3. *Задача о свободных колебаниях круглой мембраны*

Будем искать функцию $u(r,\varphi,t)$ такую, что:

$$u''_{tt} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} \right),$$

$$u|_{r=r_0} = 0,$$

$$u|_{t=0} = f(r, \varphi), \;\; u'_t|_{t=0} = g(r, \varphi).$$

Рассмотрим радиально-симметричную задачу: пусть начальные условия не зависят от φ. Тогда искомая функция тоже не будет зависеть от φ:

$$u''_{tt} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial r} \right),$$

$$u|_{r=r_0} = 0,$$

$$u|_{t=0} = f(r), \;\; u'_t|_{t=0} = g(r).$$

Используем метод разделения переменных. Будем искать решение в виде

$$u(r, t) = R(r) \cdot T(t).$$

Подставляем в исходное уравнение:

$$R \cdot T'' = a^2 (R'' \cdot T + \frac{1}{r} \cdot R' \cdot T);$$

разделяем переменные:

$$\frac{T''}{a^2 T} = \frac{R'' + \frac{1}{r} \cdot R'}{R} = -\lambda.$$

Получаем дифференциальные уравнения:

$$T'' + a^2 \lambda T = 0;$$

$$R'' + \frac{1}{r} \cdot R' + \lambda R = 0;$$

$$R(r_0) = 0.$$

Запишем второе уравнение в виде

$$r^2 \cdot R'' + r \cdot R' + \lambda r^2 R = 0.$$

Уравнение

$$T'' + a^2 \lambda T = 0$$

при $\lambda < 0$ имеет решение

$$T = C_1 e^{\sqrt{-\lambda} at} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda} at};$$

при $\lambda = 0$

$$T = C_1 t + C_2;$$

при $\lambda > 0$

$$T = C_1 \cos(\sqrt{\lambda} a t) + C_2 \sin(\sqrt{\lambda} a t).$$

Из физических соображений нам подходит только третий вариант:

$$r^2 \cdot R'' + r \cdot R' + \lambda r^2 R = 0.$$

Сделаем замену переменной $x = \sqrt{\lambda} r$, тогда

$$R' = \frac{dR}{dr} = \frac{dR}{dx}\frac{dx}{dr} = \sqrt{\lambda}\frac{dR}{dx};$$

$$R'' = \lambda \frac{d^2 R}{dx^2};$$

Уравнение примет вид

$$x^2 \frac{d^2 R}{dx^2} + x\frac{dR}{dx} + x^2 R = 0.$$

Это частный случай **уравнения Бесселя**. Решениям этого уравнения посвящен следующий пункт.

4.7.4. *Функции Бесселя*

Определение. *Дифференциальное уравнение вида*

$$x^2 y'' + x y' + (x^2 - \nu^2) y = 0, \;\; x > 0$$

называется **уравнением Бесселя** *порядка ν.*

Определение. *Решения уравнения Бесселя при $\nu \in \mathbb{Z}$ или $\nu \geq 0$, ограниченные при $x = 0$, называются* **функциями Бесселя первого рода** $J_\nu(x)$*. :*

$$J_\nu(x) := \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!\,\Gamma(m+\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+\nu}.$$

Определение. Функции Бесселя второго рода (функции Неймана) *— решения $Y_\nu(x)$ уравнения Бесселя, бесконечные в точке $x = 0$.*

Функции Неймана связаны с функциями Бесселя следующим соотношением:

$$Y_\nu(x) = \frac{J_\nu(x)\cos(\nu\pi) - J_{-\nu}(x)}{\sin(\nu\pi)}.$$

На рисунках 3 и 4 изображены графики функций Бесселя первого и второго рода (соответственно) для различных значений параметра ν.

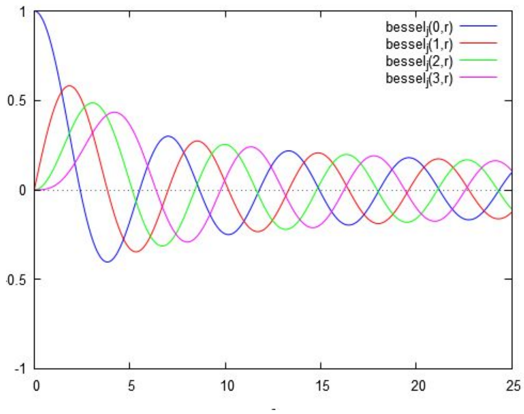

Рис. 3:

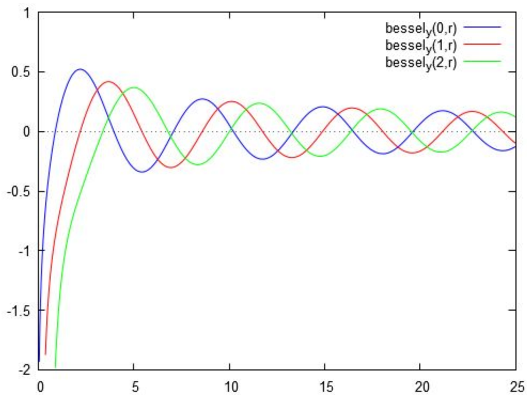

Рис. 4:

Свойства функций Бесселя.

1. Пара функций $J_\nu(x), Y_\nu(x)$ при любом фиксированном ν образует фундаментальную систему решений уравнения Бесселя.

2. $J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x), \;\; n \in \mathbb{Z}$.

3. Любая функция Бесселя (первого и второго рода) имеет бесконечное количество простых нулей $\alpha_1 < \alpha_2 < ....$

4. Функции Бесселя $J_\nu(\alpha_m x)$ и $J_\nu(\alpha_n x)$ (где α_m, α_n - нули $J_\nu(x)$) **ортогональны с весом** x на интервале $(0; 1)$.

$$\int_0^1 x J_\nu(\alpha_m x) J_\nu(\alpha_n x)\, dx = \frac{\delta_{m,n}}{2}[J'_\nu(\alpha_m)]^2.$$

Вернемся к уравнению колебаний мембраны.
Мы получили уравнение

$$r^2 \cdot R'' + r \cdot R' + \lambda r^2 R = 0$$

и заменой переменной $x = \sqrt{\lambda} r$ свели его к уравнению

$$x^2 \frac{d^2 R}{dx^2} + x \frac{dR}{dx} + x^2 R = 0.$$

Это уравнение Бесселя нулевого порядка. Его общее решение

$$y(x) = C_1 J_0(x) + C_2 Y_0(x).$$

Таким образом

$$R(r) = C_1 J_0(\sqrt{\lambda} r) + C_2 Y_0(\sqrt{\lambda} r).$$

Так как нас интересуют только ограниченные при $r = 0$ решения, полагаем $C_2 = 0$.

Найдем C_1. Мы ищем решения, удовлетворяющие условию $R(r_0) = 0$, т.е. $J_0(\sqrt{\lambda} r_0) = 0$. Обозначим нули функции J_0 через $\alpha_k^{(0)}$.

$$\sqrt{\lambda} r_0 = \alpha_k^{(0)};$$

$$\lambda_k := \left(\frac{\alpha_k^{(0)}}{r_0} \right)^2$$

Таким образом, граничному условию удовлетворяют функции

$$R_k(r) = J_0\left(\frac{\alpha_k^{(0)}}{r_0} r\right), \quad k = 1, 2, ...$$

Задача Штурма–Лиувилля

$$R'' + \frac{1}{r} \cdot R' + \lambda R = 0;$$

$$R(r_0) = 0.$$

имеет собственные значения

$$\lambda_k := \left(\frac{\alpha_k^{(0)}}{r_0}\right)^2$$

и собственные функции

$$R_k(r) = J_0\left(\frac{\alpha_k^{(0)}}{r_0} r\right), \quad k = 1, 2, ...$$

Таким образом,

$$u(r, t) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) R_k(r),$$

где

$$R_k(r) = J_0\left(\frac{\alpha_k^{(0)}}{r_0} r\right), \quad k = 1, 2, ...$$

$$T_k(t) = A_k \cos(\sqrt{\lambda_k} at) + B_k \sin(\sqrt{\lambda_k} at), \quad k = 1, 2, ...$$

Осталось подобрать коэффициенты A_k, B_k так, чтобы $u(r, t)$ удовлетворяла начальным условиям:

$$u(r, 0) = f(r) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k R_k(r);$$

$$u_t'(r, 0) = g(r) = \sum_{k=1}^{\infty} a\sqrt{\lambda}_k B_k R_k(r).$$

Таким образом, коэффициенты A_k находим как коэффициенты Фурье разложения $f(r)$ по собственным функциям задачи Штурма–Лиувилля

$$R_k(r) = J_0\left(\frac{\alpha_k^{(0)}}{r_0}r\right), \quad k = 1, 2, ...$$

$$A_k := \frac{\displaystyle\int_0^{r_0} f(r)\cdot J_0\left(\frac{\alpha_k^{(0)}}{r_0}r\right)\cdot rdr}{\displaystyle\int_0^{r_0}\left[J_0\left(\frac{\alpha_k^{(0)}}{r_0}r\right)\right]^2\cdot rdr}.$$

Аналогично

$$B_k := \frac{1}{a\sqrt{\lambda}_k}\frac{\displaystyle\int_0^{r_0} g(r)\cdot J_0\left(\frac{\alpha_k^{(0)}}{r_0}r\right)\cdot rdr}{\displaystyle\int_0^{r_0}\left[J_0\left(\frac{\alpha_k^{(0)}}{r_0}r\right)\right]^2\cdot rdr}.$$

4.8. Цилиндрические функции

Функции Бесселя первого и второго рода являются представителями класса специальных функций, носящих название **цилиндрических функций**. Так называют функции, являющиеся решениями дифференциальных уравнений, часто возникающих при решении задач математической физики в цилиндрической системе координат (хотя иногда под цилиндрическими функциями подразумевают именно функции Бесселя).

Иногда вместо функций Бесселя первого и второго рода удобно рассматривать другие решения уравнения Бесселя, являющиеся их линейной комбинацией. Например, функции

$$H_\nu^{(1)}(z) = J_\nu(z) + iY_\nu(z)$$

и

$$H_\nu^{(2)}(z) = J_\nu(z) - iY_\nu(z)$$

называют функциями Ганкеля первого и второго рода. Эти функции играют важную роль при описании волновых процессов в неограниченных областях.

4.8.1. *Модифицированные функции Бесселя*

Модифицированное уравнение Бесселя получается из классического уравнения Бесселя, если заменить переменную x на iz. При этом уравнение приобретает вид

$$z^2 \frac{d^2\omega}{dz^2} + z\frac{d\omega}{dz} - (z^2 + \nu^2)\omega = 0.$$

Функции

$$I_\nu(z) = e^{-\frac{i\nu\pi}{2}} J_\nu \left(z e^{\frac{i\pi}{2}} \right)$$

являются решениями модифицированного уравнения Бесселя, ограниченными в нуле. Они называются **функциями Инфельда.**

Функциями Макдональда называют функции

$$K_\nu(z) = \frac{\pi}{2\sin\nu\pi} \Big[I_{-\nu}(z) - I_\nu(z) \Big].$$

Также выделяют частные решения некоторых неоднородных уравнений Бесселя: функции Ломмеля, Вебера, Ангера и др.

4.9. Сферические функции

Сферические функции $Y_{lm}(\theta, \varphi)$ являются собственными функциями оператора Лапласа в сферической системе координат. Они образуют ортонормированную систему функций на сфере:

$$(Y_{jk}, Y_{lm}) = \iint_S Y_{jk}(\theta,\varphi) Y_{lm}(\theta,\varphi) \sin\theta d\theta d\varphi = \delta_{jl}\delta_{km}.$$

Сферические функции имеют вид

$$Y_{lm} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im\varphi} \Theta_{lm}(\theta),$$

где функции $\Theta_{lm}(\theta)$ являются решениями уравнения

$$\frac{1}{\sin\theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin\theta \frac{d\Theta_{lm}}{d\theta} \right) - \frac{m^2}{\sin^2\theta} \Theta_{lm} + l(l+1)\Theta_{lm} = 0$$

и имеют вид

$$\Theta_{lm} = (-1)^m \sqrt{\frac{2l+1}{2} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(\cos\theta),$$

где $P_n^m(\cos\theta) = \sin^m\theta \frac{d^m}{d(\cos\theta)^m} P_n(\cos\theta)$, — **присоединенные полиномы Лежандра**. Функции P_n — **полиномы Лежандра**. Они являются решениями дифференциального уравнения

$$(1-z^2)\frac{d^2u}{dz^2} - 2z\frac{du}{dz} + n(n+1)u = 0.$$

Их можно представить в виде

$$P_n(z) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dz^n}(z^2-1)^n.$$

5. КЛАССИФИКАЦИЯ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Рассмотрим уравнение в частных производных в общем виде:

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + f(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}) = 0.$$

Каждому такому уравнению ставим в соответствие число

$$D := B^2 - AC.$$

Определение. *Если $D > 0$, то говорят, что уравнение в частных производных относится к* **гиперболическому** *типу,*
если $D = 0$ УЧП — к **параболическому** *типу,*
если $D < 0$ УЧП — к **эллиптическому** *типу,*

Таким образом, уравнение струны относится к гиперболическому типу, уравнение теплопроводности — к параболическому типу, а уравнение Лапласа — к эллиптическому типу.

5.1. Приведение уравнения в частных производных второго порядка к каноническому виду.

Определение. *Общий вид уравнения в частных производных второго порядка от двух переменных, линейного относительно старших производных*

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + F(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}) = 0.$$

Соответствующее **характеристическое уравнение***:*

$$Ady^2 - 2Bdxdy + Cdx^2 = 0$$

или

$$Ay'^2 - 2By' + C = 0$$

Приведение к каноническому виду уравнения в частных производных гиперболического типа В уравнении гиперболического типа

$$D = B^2 - AC > 0,$$

Решим уравнение

$$Ay'^2 - 2By' + C = 0.$$

Так как дискриминант $D > 0$, квадратное уравнение имеет два различных вещественных корня $y' = \lambda_1; \quad y' = \lambda_2$, следовательно, дифференциальное уравнение имеет решения

$$y = \lambda_1 x + C_1, \ \ y = \lambda_2 x + C_2.$$

Линии $y - \lambda_1 x = C_1, \ \ y - \lambda_2 x = C_2$ называются характеристиками уравнения. Сделаем замену переменных:

$$\xi = y - \lambda_1 x,$$

$$\eta = y - \lambda_2 x$$

Используя формулы замены переменной:

$$u'_x = u'_\xi \cdot \xi'_x + u'_\eta \cdot \eta'_x,$$

$$u'_y = u'_\xi \cdot \xi'_y + u'_\eta \cdot \eta'_y$$

преобразуем исходное уравнение (в случай гиперболического уравнения из частных производных второго порядка останется только смешанная).

Приведение к каноническому виду уравнения в частных производных параболического типа В уравнении параболического типа

$$D = B^2 - AC = 0,$$

решим уравнение

$$Ay'^2 - 2By' + C = 0.$$

Так как дискриминант $D = 0$, уравнение имеет два совпадающих вещественных корня $y' = \lambda_1 = \lambda_2$, следовательно,

$$y = \lambda_1 x + C_1$$

Сделаем замену переменных:

$$\xi = y - \lambda_1 x,$$

$$\eta = \eta(x, y),$$

где η — любая функция, такая, что η, ξ являются независимыми функциями.

Используя формулы замены переменной, преобразуем исходное уравнение (в случае параболического уравнения останется только $u''_{\eta\eta}$).

Приведение к каноническому виду уравнения в частных производных эллиптического типа В уравнении эллиптического типа

$$D = B^2 - AC < 0,$$

решим уравнение

$$Ay'^2 - 2By' + C = 0.$$

Так как дискриминант $D < 0$, уравнение имеет два различных комплексно-сопряженных корня $y' = \lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$, следовательно,

$$y = \lambda_{1,2} x + C_{1,2} = \alpha x \pm i\beta x + C_{1,2}$$

Сделаем замену переменных:

$$\xi = Re(y - \lambda_1 x) = y - \alpha x,$$

$$\eta = Im(y - \lambda_1 x) = y - \beta x$$

Используя формулы замены переменной, преобразуем исходное уравнение.

Рассмотрим уравнение

$$u''_{xx} + 2 \cdot u''_{xy} + u''_{yy} + u'_x + u'_y = 0$$

Определим тип:

$$D = 1 - 1 = 0$$

— уравнение параболического типа.

Этому уравнению соответствует характеристическое уравнение

$$y'^2 - 2 \cdot y' + 1 = 0.$$

Решаем квадратное уравнение

$$y' = 1.$$

Следовательно,

$$y = x + C_1,$$

Делаем замену переменной:

$$\xi = x - y,$$

$$\eta = y.$$

$$u'_x = u'_\xi;$$

$$u'_y = -u'_\xi + u'_\eta;$$

$$u''_{xx} = u''_{\xi\xi};$$

$$u'_{xy} = (u'_\xi)'_y = -u''_{\xi\xi} + u''_{\xi\eta}$$

$$u'_{yy} = (-u'_\xi)'_y + (u'_\eta)'_y = u''_{\xi\xi} - u''_{\xi\eta} - u''_{\eta\xi} + u''_{\eta\eta} =$$

$$= u''_{\xi\xi} - 2u''_{\xi\eta} + u''_{\eta\eta}$$

Подставляем в исходное уравнение

$$u''_{\xi\xi} + 2(-u''_{\xi\xi} + u''_{\xi\eta}) +$$

$$+ u''_{\xi\xi} - 2u''_{\xi\eta} + u''_{\eta\eta} + u'_\xi - u'_\xi + u'_\eta = 0.$$

$$u''_{\eta\eta} + u'_\eta = 0.$$

Это уравнение легко решается:

$$u = F_1(\xi) + F_2(\xi)e^{-\eta}.$$

Ответ: $u = F_1(x - y) + F_2(x - y)e^{-y}$.

Рассмотрим уравнение

$$u''_{xx} - 2\sin x \cdot u''_{xy} - \cos^2 x \cdot u''_{yy} - \cos x \cdot u_y = 0$$

Определим тип:

$$D = \sin^2 x + \cos^2 x = 1 > 0,$$

— уравнение гиперболического типа.

Этому уравнению соответствует характеристическое уравнение

$$y'^2 + 2\sin x \cdot y' - \cos^2 x = 0.$$

Решаем квадратное уравнение

$$y' = -\sin x \pm 1.$$

Следовательно,

$$y = \cos x + x + C_1,$$

$$y = \cos x - x + C_2,$$

Вводим новые переменные:

$$\xi := y - \cos x - x;$$

$$\eta := y - \cos x + x;$$

$$y = \cos x + x + C_1,$$

$$y = \cos x - x + C_2,$$

$$u'_x = u'_\xi \cdot (\sin x - 1) + u'_\eta \cdot (\sin x + 1);$$

$$u'_y = u'_\xi + u'_\eta$$

$$u''_{xx} = (u'_\xi \cdot (\sin x - 1) + u'_\eta \cdot (\sin x + 1))'_x =$$

$$= (u'_\xi)'_x(\sin x - 1) + u'_\xi \cdot \cos x + (u'_\eta)'_x \cdot (\sin x + 1) + u'_\eta \cdot \cos x =$$

$$= u'_{\xi\xi} \cdot (\sin x - 1)^2 + 2u''_{\xi\eta} \cdot (\sin x - 1)(\sin x + 1) + u''_{\eta\eta} \cdot (\sin x + 1)^2 +$$

$$+(u'_\xi + u'_\eta)\cos x.$$

$$u''_{xy} = u''_{\xi\xi} \cdot (\sin x - 1)^2 + 2u''_{\xi\eta} \cdot (\sin x - 1)(\sin x + 1) + u''_{\eta\eta} \cdot (\sin x + 1)^2;$$

$$u''_{yy} = u''_{\xi\xi} + 2u''_{\xi\eta} + u''_{\eta\eta}.$$

Подставляя в исходное уравнение, получаем

$$4u''_{\xi\eta} = 0.$$

Найдем общее решение уравнения:

$$u''_{\xi\eta} = 0.$$

$$u'_{\xi} = \tilde{\Phi}(\xi);$$
$$u = \Phi(\xi) + \Psi(\eta).$$

Решение исходного уравнения

$$u = \Phi(y - \cos x - x) + \Psi(y - \cos x + x).$$

5.2. Формула Даламбера для бесконечной струны

Используем приведеный выше способ приведения дифференциального уравнения в частных производных к каноническому виду для доказательства следующей теоремы.

Теорема 4. *Общее решение волнового уравнения*

$$u''_{tt} = a^2 u''_{xx}$$

может быть записано в виде **формулы Даламбера**

$$u = F_1(x - at) + F_2(x + at), \tag{7}$$

где F_1, F_2 - произвольные дважды дифференцируемые функции.

Доказательство 1. *Приведем уравнение к каноническому виду: из характеристического уравнения*

$$dx^2 = a^2 dt^2$$

находим

$$\frac{dx}{dt} = \pm a.$$

Делаем замену переменных

$$\xi = x - at, \ \ \eta = x + at.$$

Уравнение принимает вид

$$u''_{\xi\eta} = 0,$$

следовательно,

$$u = F_1(\xi) + F_2(\eta) = F_1(x - at) + F_2(x + at).$$

Теорема 5 (о колебаниях бесконечной струны). *Решение уравнения*

$$u''_{tt} = a^2 u''_{xx}$$

с начальными условиями

$$u(x,0) = f(x), \quad u'_t(x,0) = g(x)$$

имеет единственное решение

$$u(x,t) = \frac{f(x-at) + f(x+at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} g(s)ds.$$

Идея доказательства заключается в следующем. В предыдущей теореме было получено общее решение волнового уравнения

$$u = F_1(x-at) + F_2(x+at).$$

С учетом начальных условий получаем следующие уравнения для определения функций F_1 и F_2:

$$F_1(x) + F_2(x) = f(x),$$

$$-aF'_1(x) + aF'_2(x) = g(x).$$

Проинтегрируем второе уравнение

$$-F_1(x) + F_2(x) = \frac{1}{a}\int_{x_0}^{x} g(s)ds + C.$$

Получили систему для функций F_1 иF_2:

$$F_1(x) + F_2(x) = f(x),$$

$$-F_1(x) + F_2(x) = \frac{1}{a}\int_{x_0}^{x} g(s)ds + C,$$

решая которую, находим

$$F_1(x) = \frac{1}{2}f(x) - \frac{1}{2a}\int_{x_0}^{x} g(s)ds - C/2,$$

$$F_2(x) = \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2a}\int_{x_0}^{x} g(s)ds + C/2.$$

Подставляя эти функции в общее решение уравнения 7, получаем

$$u(x,t) = \frac{f(x+at) + f(x-at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} g(s)ds.$$

6. ОБОБЩЕННЫЕ ФУНКЦИИ

Этот раздел носит ознакомительный характер и рекомендуется к прочтению тем студентам, которые собираются в дальнейшем заниматься исследованием математических моделей физических процессов. Понятие обобщенной функции является одним из базовых понятий современной математической физики. Необходимость в них возникает при попытке строгого математического описания идеализации некоторых физических явлений. Например, при описании плотности материальной точки с единичной массой в физике используется так называемая дельта-функция Дирака — некий объект, равный нулю всюду, кроме одной точки, а в этой точке принимающий бесконечное значение, причем интеграл от этого объекта должен быть равен единице. Такие объекты в физике называются сингулярными функциями. В математическом смысле функцией такой объект не является, однако необходимость работы с такими объектами привела к развитию специального математического аппарата.

6.1. Пробные функции

Для того чтобы ввести определение обобщенной функции, нам потребуется зафиксировать так называемое **пространство пробных функций**. Пусть $\mathcal{D}$ — множество бесконечно дифференцируемых функций, равных нулю вне некоторого отрезка (отрезок может отличаться для разных функций). Таким образом, это бесконечно гладкие функции, равные нулю в некоторой окрестности бесконечности. Заметим, что в качестве пробных функций можно брать и другие множества "достаточно хороших" функций.

Рассмотрим обычную функцию $f(x)$, ставящую в соответствие каждому вещественному числу $x \in \mathbb{R}$ значение $f(x)$. Каждой такой функции можно поставить в соответствие линейное отображение I_f из пространства $\mathcal{D}$, которое пробной функции φ ставит в соответствие число

$$I_f(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)dx.$$

Этот интеграл в действительности не является несобственным, так как функция φ отлична от нуля лишь на конечном отрезке. Линейность такого отображения следует из свойств интеграла. Такие отображения (сопоставляющие функции число) называются **функционалами**.

6.2. Обобщенные функции

Определение. Обобщенной функцией *называется линейный функционал I, ставящий в соответствие каждой пробной функции $\varphi \in D$ число $I(\varphi)$ и удовлетворяющий*

1) условию линейности

$$I(\varphi_1 + k \cdot \varphi_2) = I(\varphi_1) + k \cdot I(\varphi_2), \quad \forall k \in \mathbb{R};$$

2) условию непрерывности

$$I(\varphi_n) \to I(\varphi) \text{ при } \varphi_n \rightrightarrows \varphi.$$

Выше мы ввели функционал I_f, построенный по "обычной" функции f. Он удовлетворяет нашему определению обобщенной функции. Такие обобщенные функции мы будем называть **классическими**.

Теперь рассмотрим пример обобщенной функции, которую невозможно получить описанным выше способом ни из какой "обычной" функции f.

Определение. Дельта-функцией Дирака *называется линейный функционал δ_a, ставящий в соответствие пробной функции $\varphi \in \mathcal{D}$ ее значение в точке a:*

$$\delta_a(\varphi) := \varphi(a).$$

Нетрудно видеть, что условия линейности и непрерывности выполняются, и определенное выше отображение действительно является обобщенной функцией.

Наравне с обозначением $I(\varphi)$ используют также обозначение $\langle I, \varphi \rangle = I(\varphi)$.

Часто дельта-функция возникает в задачах как предел последовательности классических функций. Пусть, например,

$$f_n(x) := \frac{1}{\pi} \frac{n}{n^2 x^2 + 1}.$$

Тогда при $n \to \infty$

$$I_{f_n} \to \delta_0.$$

6.3. Дифференцирование обобщенных функций

Обобщенные функции можно складывать и умножать на числа. Кроме того, обобщенные функции можно дифференцировать (в отличие от обычных функций, которые часто дифференцируемыми не являются). Производная обобщенной функции также является обобщенной функцией.

Определение. *Производной обобщенной функции I называется обобщенная функция I', действующая на пробные функции следующим образом:*

$$I'(\varphi) := -I(\varphi').$$

Посмотрим, как дейсвует это определение для классических функций в случае, когда f является дифференцируемой. Используя формулу интегрирования по частям и учитывая, что пробные функции равны нулю в окрестности бесконечности, получаем

$$I_f'(\varphi) = -\int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi'(x)dx = \int_{\mathbb{R}} f'(x)\varphi(x)dx = I_{f'}(\varphi).$$

Таким образом, производная обобщенной функции, соответствующей функции f, является обобщенная функция, соответствующая f'.

Теперь попробуем продифференцировать дельта-функцию:

$$\delta_0'(\varphi) = -\delta_0(\varphi') = -\varphi'(0).$$

Рассмотрим еще один пример обобщенной функции, которая не является классической.

Определение. *Обобщенная функция*

$$H(\varphi) := \int_0^\infty \varphi(x)dx$$

называется **функцией Хевисайда**.

Покажем, что производная функции Хевисайда равна дельта-функции Дирака:

$$H'(\varphi) = -H(\varphi') = -\int_0^\infty \varphi'(x)dx = \varphi(0) = \delta_0(\varphi).$$

Таким образом, аппарат обобщенных функций позволяет с единой точки зрения рассматривать дифференцирование как обычных функций, так и функций, не являющихся дифференцируемыми в классическом смысле, и даже разрывных.

6.4. Ряд Фурье обобщенной функции

Рассмотрим ортогональную систему функций $\phi_n(x) \in L^2([a,b])$. Для функции $f \in L^2([a,b])$ коэффициенты Фурье определяются формулой

$$c_n := \int_a^b f(x)\phi_n(x)dx.$$

Используя понятие обобщенной функции, можно распространить определение коэффициентов Фурье и на случай обобщенных функций.

Определение. Коэффициентами Фурье *обобщенной функции I назовем*

$$c_n := I(\phi_n).$$

Рядом Фурье *обобщенной функции называется* **формальный ряд**

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \phi_n(x),$$

(слово "формальный" здесь означает, что мы не интересуемся вопросом сходимости этого ряда).

В качестве примера рассмотрим ряд Фурье дельта-функции Дирака δ_0 по классической тригонометрической системе $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}$:

$$a_0 = \delta_0\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}};$$

$$a_n = \delta_0\left(\frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}\right) = \frac{1}{\sqrt{\pi}};$$

$$b_n = \delta_0\left(\frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}\right) = 0.$$

Таким образом,

$$\delta_0(x) = \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \cos nx$$

6.5. Фундаментальное решение уравнения теплопроводности

Использование аппарата обобщенных функций позволяет рассматривать идеализированные варианты задач математической физики. Такой подход проявляет смысл слов, сказанных о физическом смысле функции Грина для уравнения теплопроводности (см. 3.1.). Мгновенное введение тепла в точке x_0 в начальный момент времени описывается следующим начальным условием (в обобщенном смысле)

$$U_0(x) = \delta_{x_0}(x).$$

В формуле (6) описано решение однородной задачи теплопроводности с начальным условием, заданным функцией U_0 в обыкновенном смысле. Рассматривая соответствующую обобщенную функцию, можно записать это решение в виде

$$u(x,t) = I_{U_0}(\zeta)(G(x,\zeta,t)).$$

Теперь мы можем использовать эту формулу для построения решения задачи с начальными условиями, заданными с помощью обобщенных функций (мы не будем обосновывать законность такого перехода). Подставляя

$$U_0(x) = \delta_{x_0}(x),$$

получаем

$$u(x,t) = \delta_{x_0}(\zeta)(G(x,\zeta,t)) = G(x,x_0,t).$$

Таким образом, функция Грина $G(x,x_0,t)$ служит обобщенным решением уравнения теплопроводности с начальным условием, заданным дельта-функцией Дирака:

$$U_0(x) = \delta_{x_0}(x).$$

Такое решение называется **фундаментальным решением уравнения теплопроводности**.

П Р И Л О Ж Е Н И Е

Собственные числа и собственные функции задач Штурма – Лиувилля с различными граничными условиями

Типы краевых условий	λ_k	X_k	$\|X_k\|$
Дирихле: $x(0) = x(l) = 0$	$\lambda_k = \left(\frac{\pi k}{l}\right)^2$, $k = 1, 2, \ldots$	$X_k = \sin\left(\frac{\pi k}{l}x\right)$, $k = 1, 2, \ldots$	$\|X_k\|^2 = l/2$
Неймана: $x'(0) = x'(l) = 0$	$\lambda_k = \left(\frac{\pi k}{l}\right)^2$, $k = 0, 1, 2, \ldots$	$X_k = \cos\left(\frac{\pi k}{l}x\right)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$	$\|X_k\|^2 = l/2$
Дирихле-Неймана: $x(0) = x'(l) = 0$	$\lambda_k = \left(\frac{\pi(2k-1)}{2l}\right)^2$ $k = 1, 2, \ldots$	$X_k = \sin\left(\frac{\pi(2k-1)}{2l}x\right)$ $k = 1, 2, \ldots$	$\|X_k\|^2 = l/2$
Неймана-Дирихле: $x'(0) = x(l) = 0$	$\lambda_k = \left(\frac{\pi(2k-1)}{2l}\right)^2$ $k = 1, 2, \ldots$	$X_k = \cos\left(\frac{\pi(2k-1)}{2l}x\right)$ $k = 1, 2, \ldots$	$\|X_k\|^2 = l/2$

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

О Г Л А В Л Е Н И Е

Кононова Анна Александровна, Белкова Анастасия Леонидовна

Уравнения математической физики

Редактор *Г.М. Звягина*
Корректор *Л.А. Петрова*
Компьютерный набор и верстка А.А. Кононова и А.Л. Белкова
Подписано в печать 31.05.2019. Формат 60х84/16. Бумага документная.
Печать трафаретная. Усл. печ. л. 4,5. Тираж 100 экз. Заказ №
Балтийский государственный технический университет
Типография БГТУ
190005, С.-Петербург, 1-я Красноармейская ул., д. 1